SYSTÉMATIQUE MODALE II^{E} PARTIE : ÉTUDE THÉORIQUE ET STATISTIQUE

« ***Presque tout ce qui appartient à la théorie musicale est un produit de l'art, étranger à la nature*** »
Sheikh Abu Naşr Al Fârâbî

« ***La double octave ne comportera guère, en pratique, plus de quatorze intervalles ; l'octave, plus de sept ; la quinte, plus de quatre intervalles et cinq degrés ; la quarte, plus de trois intervalles et quatre notes ; le ton, plus de deux intervalles. C'est l'expérience et non pas la nécessité théorique qui l'exige*** »***.***
Ibn Sîna – Kitâbu-sh-Shifâ'

→ **Avertissement**

L'étude théorique et statistique en systématique modale est conçue comme un manuel d'apprentissage de la méthode : la complexité des moyens mis en œuvre ainsi que des critères de sélection des systèmes a imposé une gradation de l'exposé d'un outil d'analyse différent de ceux utilisés classiquement ; la deuxième partie suit par conséquent une double gradation (demi-ton → quart de ton et systèmes pentatoniques → heptatoniques → quelconques) qui devrait permettre au lecteur, dans une première approche, de rentrer plus facilement dans le sujet : une des conséquences de ce choix est que la lecture de cette deuxième partie ne peut être que séquentielle pour permettre au lecteur de se familiariser au fur et à mesure avec les concepts de la théorie et leurs applications pratiques ainsi qu'avec la lecture et la compréhension des fichiers de résultats et des graphiques, surtout synoptiques ; il est assumé que, au bout de la lecture de l'exposé sur les systèmes heptatoniques, le lecteur sera suffisamment familiarisé avec la méthode pour déchiffrer les graphiques et les résultats numériques sans l'aide d'annotations particulières.

Par ailleurs, le champ d'application de la méthode étant vaste (par exemple pour les systèmes quelconques), les résultats numériques et graphiques sont très détaillés (et volumineux, surtout pour les résultats des bases de données en sous-systèmes et les sauvegardes de graphiques affichés à l'écran) : l'intégralité des résultats des générations modales exposées dans le corps du mémoire, ainsi que de calculs complémentaires de vérification (tests de fiabilité et de précision) effectués par l'auteur ne pouvaient de ce fait être reproduits, même sur CD-ROM, d'où le choix d'exposer une sélection raisonnée de résultats dans l'Annexe ; l'interprétation des résultats et les conclusions se font uniquement à partir des documents fournis, qui devraient donc suffire à des fins de démonstration.

- ***Introduction à la deuxième partie***

L'évolution de la représentation des caractéristiques d'un mode, constatée en musique arabe à travers l'étude en première partie, et basée sur les caractéristiques de cette musique, semble montrer qu'une représentation par suite d'intervalles semble la plus à même de nous donner les indications nécessaires à la compréhension de la structuration interne (échelles modales) de ces modes.

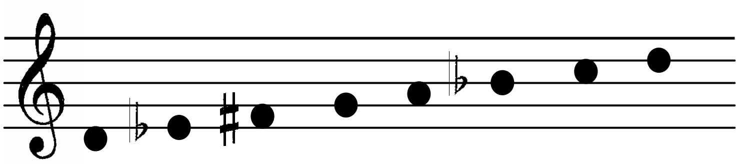
Le système de « notation » par suite d'intervalles fut déjà utilisé par Erlanger dans son livre en six tomes sur la musique arabe ; il a été repris par quasiment tous les théoriciens dont les écrits sont passés en revue en première partie, et a l'avantage d'être relatif tout en permettant une précision suffisante : en effet, il est très courant dans la pratique de la musique arabe contemporaine (Machreq) d'utiliser des expressions du style « on rajoute un ĥijâz sur DO » pour expliquer que les notes suivantes du maqâm seront approximativement un RÉ^{b}, MI et FA (le ĥijâz_4 ou le genre ĥijâz correspondant à une suite d'intervalles de 1/2 ton, 1 + 1/2 ton, 1/2 ton à peu près).

L'échelle caractéristique d'un mode est souvent représentée par une succession de genres, se chevauchant parfois, en montée ou en descente : la description par genres n'est même plus l'apanage du Machreq puisque Al Mahdî (Tunisie) en fait son système principal de caractérisation d'un mode.

Ŝaliĥ, par son approche purement intervallique, va plus loin (ou retourne aux sources) en ne prenant pas la notation occidentale (systèmes de hauteurs) comme référence d'appoint.

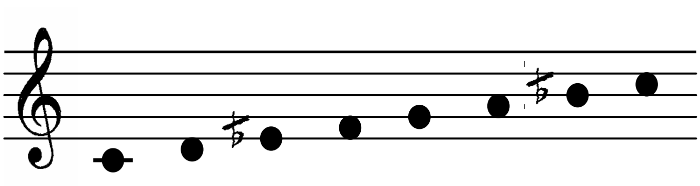
En fait, la notation par suite d'intervalles est tout à fait équivalente, pour la musique modale, à la notation par systèmes de hauteurs, à condition de préciser le degré (dont la hauteur est toujours relative) de départ.

L'échelle principale du maqâm Ĥijâz est notée, en système de hauteur :



Elle est équivalente à la notation (RÉ) 1/2 ton, 1 1/2 ton, 1/2 ton, 1 ton, 1/2 ton, 1 ton, 1 ton, et peut être décrite comme un ĥijâz_4 (genre-jins ĥijâz) sur RÉ suivi par un kurd_4 sur LA (sous-entendu avec un intervalle de disjonction, ici équivalent à un ton).

De même, l'échelle principale du maqâm Râst serait « notée » :



ou comme (DO) 1 ton, 3/4 de ton, 3/4 de ton, 1 ton, 1 ton, 3/4 de ton, 3/4 de ton, ou encore comme un râst_4 sur DO suivi d'un râst_4 sur SOL (le râst_4 étant équivalent à la suite d'intervalles : 1 ton, 3/4 de ton, 3/4 de ton à peu près).

L'autre système de notation par suite d'intervalles serait de définir ces derniers comme des multiples d'un intervalle de base, en l'occurrence et pour la musique arabe (et modale de manière générale, comme nous le verrons plus loin) le 1/4 de ton : dans ce système le maqâm Ĥijâz pourrait être noté (RÉ) 2,6,2,4,2,6,2 et le Râst (DO) 4,3,3,4,4,3,3 (ou encore 4 3 3 4 4 3 3 sur DO). Ceci sans oublier qu'aucun de ces intervalles n'est tout à fait tempéré, à fortiori pour les 3/4 de ton, et qu'aucune de ces notation « en hauteurs » ne correspond à une réalité « exacte », en hauteurs absolues ou en hauteurs relatives. Ceci étant établi, l'approximation par quart de ton semble satisfaire la majorité des théoriciens et des praticiens (souvent confondus pour la musique arabe), quelles que soient leur nationalité et leur région d'origine : elle a l'avantage, en ce qui concerne une étude systématique des modes, d'être exprimée par chiffres – ce qui permet un classement (ou un rangement) aisé - et reproductible par le calcul informatique ; c'est ce type de notation que j'utilise dans la suite de ce mémoire.

Pour plus de lisibilité, les parties purement informatiques ou d'accès difficile pour le non-spécialiste sont encadrées et en couleur bleue : ces passages ne sont pas indispensables à la compréhension du reste du mémoire.

De la pertinence de l'approximation des intervalles utilisés en musiques modales par des intervalles multiples du 1/4 de ton

- ***Le concept de discrétisation – application aux intervalles de la musique arabe***

La discrétisation est la représentation d'une valeur réelle par une approximation chiffrée à travers la division d'un milieu continu en unités élémentaires (discrètes) : dans le cas des systèmes musicaux, la discrétisation consiste (par exemple) en une division de l'espace continu des hauteurs en quantièmes ou valeurs discrètes (chiffrables) entières (savart, cent, centième, comma, 1/8 de ton, 1/4 de ton, limma, 1/2 ton)[273], un intervalle quelconque pouvant être plus ou moins exactement approché (approximé) par un nombre entier de ces quantièmes. Rappelons que toute mesure, dans l'absolu, consiste en un processus de discrétisation-approximation, puis en une comparaison avec un étalon arbitraire : le kilogramme est une unité discrète mesurant le poids (la masse), cette unité étant elle-même quantifiable comme équivalente à 1 000 grammes ; pour mesurer le poids, plusieurs méthodes sont possibles dont la plus simple est la balance à ressort. La définition (pouvoir de discrimination) de cette balance est différente selon le degré d'exactitude exigé par l'utilisateur : un pèse-personne peut mesurer le poids au kilogramme près tout comme il peut le faire jusqu'au milligramme près s'il est prévu pour ; en pratique, une définition de 100 grammes est généralement suffisante pour avoir une idée suffisamment précise du poids d'une personne adulte, surtout à des fins de comparaison – cette définition peut s'avérer cependant insuffisante pour mesurer le poids d'un bébé pour lequel une variation de 50 grammes est souvent importante : dans ce genre de cas, nous utilisons des balances spéciales pour bébé dont la définition peut aller jusqu'au gramme (ou plus si désiré et si possible techniquement). La définition (pouvoir de discrimination) d'un pèse-personne ne détermine cependant pas l'exactitude de la mesure (tolérance), mais seulement sa précision : le poids ne sera exact (à la définition de la balance près) que si le mécanisme du pèse-personne fonctionne de manière satisfaisante, et si la balance a été étalonnée de manière suffisamment exacte et précise par rapport au poids étalon (normalisé) ; là aussi la précision de l'étalonnage dépend de la définition de l'outil ou de l'instrument utilisé pour étalonner, et ainsi de suite[274].

Mais revenons à la musique : nous avons un espace continu, l'ensemble des hauteurs, qui peut être mesuré en quantièmes d'octave ou d'une autre unité, ou en fréquences ; ces mesures sont toujours approximatives et leur précision dépend de la définition de l'instrument de mesure (sonomètre ou autre), leur exactitude dépendant de la fiabilité de l'instrument et de son étalonnage : c'est ainsi qu'un son correspondra par exemple à 440 herz (un LA) à un herz près (précision) si la définition de l'instrument de mesure correspond au herz, et plus ou moins exactement selon la fiabilité de cet instrument de mesure et ses algorithmes d'arrondissement (si c'est un appareil digital)[275].

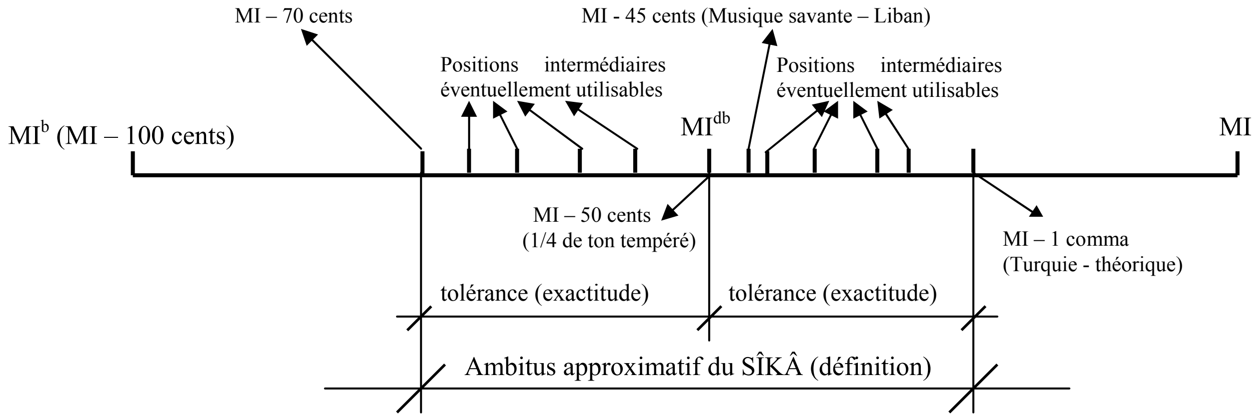
Le pouvoir de discrimination de l'oreille est fréquemment fixé à 5 cents (pour 1200 cents à l'octave et 100 cents par demi-ton, 50 par 1/4 de ton) : dans le cadre de mes recherches j'utilise un clavier arrangeur Roland E-50 « OR » (pour « oriental ») qui permet de faire varier une note (autour d'une valeur tempérée en multiple de demi-ton) de -64 à +63 cents – la définition de ce clavier arrangeur quant aux intervalles est donc de un cent, son exactitude m'étant inconnue (mais je fais confiance au constructeur). Pendant une séance de discussion dans le cours de l'année 2002 avec Saad Saab (S.S.) et Joseph Loueizeh (J.L. - tous deux enseignants au CNSMB), j'ai été amené à programmer un mode Bayât (RÉ, MI^{db}, FA, SOL, LA, SI^{b}, DO, RÉ) sur l'arrangeur, pour les besoins de la démonstration, ce processus passant par des touches pré-programmées qui abaissent les notes de 50 cents exactement : J.L. a immédiatement réagi à l'écoute des quelques phrases musicales que je jouais en me demandant de hausser la note SÎKÂ (MI^{db}) qui était trop basse (MI abaissé de 50 cents) ; j'ai programmé une hausse de 15 cents (MI – 35 cents) qui lui a paru excessive[276] – au bout de quelques approximations successives, la hauteur précise pour le SÎKÂ du mode Bayât s'est avérée correspondre à MI – 45 cents, donc cinq cents au dessus de la note initialement programmée et jouée[277]. Dans le cours de discussions ultérieures avec ces enseignants et avec divers musicologues libanais, ainsi que pendant une série d'ateliers de musiques traditionnelles que j'organisais pour le compte de l'Agence intergouvernementale de la Francophonie dans une douzaine de villages libanais[278], j'ai pu me rendre compte que le SÎKÂ du maqâm Bayât populaire (Dal`ûnâ et autres pièces du

[273] Il est bien évidemment possible de discrétiser un espace continu de manière irrégulière : le fractionnement en éléments égaux, quand la cellule élémentaire (plus petit élément) est suffisamment petite, simplifie l'interprétation des résultats.
[274] Citons, comme autre exemple de modèle par discrétisation (et dont les résultats influencent des millions de gens tous les jours), les prévisions météo : les masses d'air en mouvement sont représentées (fractionnées) à l'aide de cubes élémentaires (tout ceci de manière très simplifiée) avec des lois de comportement internes (pour chaque cube), aux limites entre deux cubes, ainsi que par des équations globales.
[275] Dans le cas d'instruments de mesure analogiques, deux limitations interviennent qui sont le pouvoir de discrimination des sens de l'intervenant (appréciation des graduations et des valeurs intermédiaires dans le cas d'une aiguille d'un sonomètre par exemple) ainsi que la fiabilité de la réponse de l'instrument (qui dépend de la fabrication, de l'inertie et de sa compensation et de quelques autres facteurs).
[276] Joseph Loueizeh est par ailleurs accordeur de piano « oriental » et connu au conservatoire de Beyrouth (CNSMB) pour la qualité et la précision de son écoute musicale.
[277] Cette réaction au 1/4 de ton tempéré arrive souvent, y compris à la Sorbonne où, courant 2001, j'ai été amené à faire un exposé à l'aide du même clavier arrangeur pour le groupe de recherche en ethnomusicologie (Paris IV) : Jean-Claude Chabrier s'était plaint à cette occasion du fait que la note SÎKÂ que j'utilisais (tempérée à 50 cents au-dessous du MI) était trop basse – je n'ai pas reprogrammé le SÎKÂ à cette occasion, mais je pense que Monsieur Chabrier aurait préféré une correspondance avec l'échelle pythagoro-systématiste utilisée en turquie, avec un MI demi-bémol à un comma plus bas que le MI : rappelons quand même que Signell (abordé en 1^{e} partie) signale des intervalles de 3/4 de ton (à peu près) dans la pratique de la musique turque.
[278] au printemps 2002.

répertoire populaire) était nettement plus bas que le SÎKÂ du Bayât « savant », et pouvait se situer jusqu'à MI – 70 cents[279] : le jeu du Bayât populaire sur le `ûd (ou tout autre instrument mono- ou multi-continu) peut facilement donner lieu à des degrés SÎKÂ placés à cette distance du MI, ou encore permettre des petites variations en montée ou en descente (SÎKÂ plus bas en montée, plus haut en descente par exemple) qui constituent le cœur de ce que peut apporter un instrument non tempéré à une musique modale. Même une petite différence de cinq cents[280] peut apporter un embellissement à la phrase musicale jouée et créer les conditions d'une interprétation différente sinon unique. Notons donc que la différence entre le SÎKÂ du Bayât populaire et le SÎKÂ du Bayât savant peut être supérieure à 25 cents, et ceci dans un même pays (le Liban en l'occurrence) ou encore plus élevée entre deux régions différentes de la zone du maqâm (différence de l'ordre de deux commas entre la Turquie et le Liban – Bayât populaire pour ce pays), <u>mais la note résultante sera toujours assimilée au SÎKÂ et cela quel que soit le répertoire ou le pays</u> : la tolérance totale (des deux côtés haut et bas – soit l'ambitus du SÎKÂ) est ici de l'ordre du quart de ton (ou l'équivalent approximatif de deux commas), ce qui nous donne une première indication quant à la précision de l'instrument de mesure (ici virtuel) dont nous avons besoin pour caractériser la musique arabe.

En regardant le schéma ci-dessous (qui n'a pas la prétention d'être exactement à l'échelle), nous pouvons mieux mesurer la relativité des degrés utilisés pour caractériser la musique arabe :

<u>Figure n° 4.</u> **<u>Tolérances du degré SÎKÂ</u>**



L'intervalle de 3/4 de ton (RÉ-MI^{db}) caractérisant le SÎKÂ du mode Bayât peut ici être discrétisé en multiples du 1/4 de ton (qui équivaut à la définition) avec une tolérance en plus ou en moins de l'ordre du comma (plus exactement la moitié d'un quart de ton, soit un huitème de ton) : cet intervalle discret vaut donc 3/4 de ton plus ou moins un comma et pourra être noté « 3 » (sous-entendu « trois fois le quantième de base égal au quart de ton »). Pour plus de précision, et quand il s'agit de décrire des processus internes de variations au sein d'un système, cette notation peut être améliorée en assignant des indices « commatiques » qui réduiront la tolérance à 1/2 comma, de telle manière que l'intervalle bas utilisé dans l'exemple de la Dal`ûna puisse être noté 3^{-} et l'intervalle haut de la musique turque 3^{+} ; ces précisions de la notation sont avant tout **quantitatives** : la discrétisation en multiples du 1/4 de ton suffit pour caractériser (différencier qualitativement) l'intervalle en question, dans les limites de la tolérance choisie (le comma), et l'intervalle en question sera reconnu comme caractéristique dans les limites de cette tolérance[281].

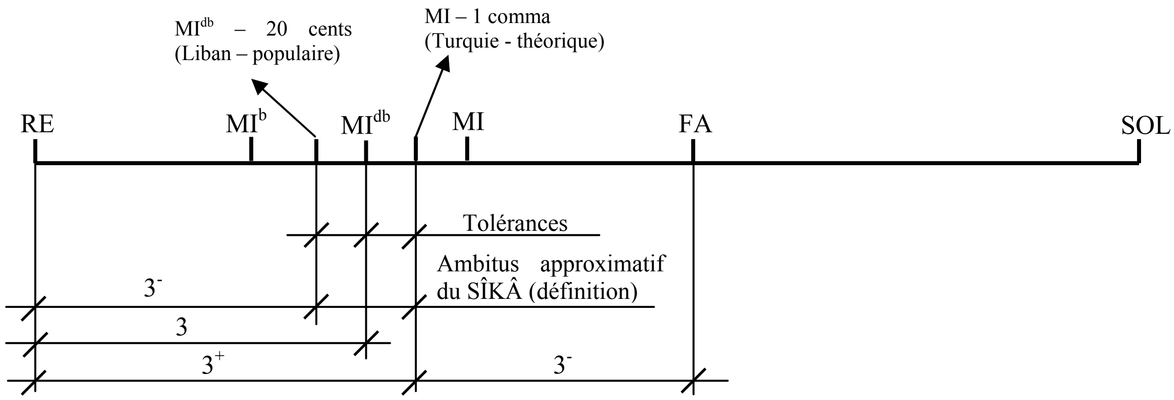
[279] Le lecteur se demandera peut-être comment programmer un SÎKÂ à -70 cents sur le clavier arrangeur puisque la borne inférieure se situe à -64 cents : la réponse est simple, il suffit de programmer le RÉ dièse (en l'occurrence MI^{b}) à +30 cents ou de jouer sur un instrument à divisions continues comme le `ûd.

[280] Cette limite de cinq cents n'est pas absolue : le nombre de facteurs ayant une influence sur la perception auditive est tout simplement trop grand pour une généralisation aussi « précise » - le timbre, la fréquence, en fait toutes les composantes du son peuvent jouer ici un rôle, mais aussi l'état psychologique de l'auditeur, etc.

[281] On peut comparer ce raisonnement avec la pratique vocale du maqâm, ou d'autres musiques du monde : le degré à atteindre est un degré cible, et précis (pour chaque repertoire, maqâm, ou type d'interprétation), mais l'interprète a une latitude qui atteint parfois le demi-ton – la perception de ce degré par l'auditeur n'est pas faussée pour autant.

Généralisons ce raisonnement à de petits groupes scalaires, en l'occurrence les genres. Si nous considérons le genre Bayât (334 en multiples de 1/4 de ton), est-ce qu'une approximation (discrétisation) en 1/4 de ton est suffisante pour caractériser ce genre? Dans le cas d'un SÎKA (théorique) à la turque, le genre Bayât peut être noté 3^+3^-4, et sera noté 3^-3^+4 pour un Bayât « populaire » du Liban : la tolérance est toujours de l'ordre du comma, et la combinaison (groupement scalaire) 334 (sans plus de précision) permet de caractériser ce genre, qu'il soit utilisé dans l'une ou l'autre de ces musiques (voir schéma ci-dessous).

Figure n° 5. Tolérances du genre Bayât autour du degré SÎKÂ



Cette approximation-discrétisation suffit pour **différencier** le genre Bayât (334), qui a une et une seule représentation RS (appréciation qualitative), des deux genres « parents[282] » que sont le nahawand (mineur – 424) ou kurd (244) puisque ces deux derniers genres ont aussi respectivement une et une seule représentation dans ce système de notation. En d'autres termes, la notation RS en multiples de 1/4 de ton permet d'attester l'existence d'intervalles approximativement égaux à des multiples du 1/4 de ton, mais ne prétend nullement donner une mesure exacte de ces intervalles : cette approximation est cependant suffisante pour différencier une qualité d'intervalle d'une autre, et permet l'étude systématique et qualitative (mais tout aussi quantitative) qui va suivre. Le 1/4 de ton est l'intervalle de base pour l'approximation des intervalles utilisés dans la réalité, mais la combinatoire ne change pas : son existence (le 1/4 de ton) permet de modéliser[283] rapidement et fiablement les intervalles intermédiaires de la musique modale non tempérée qui peuvent effectivement exister entre les bornes (intervalles) du tempérament égal occidental, tout comme le 1/2 ton est une approximation (discrétisation au 1/4 de ton près) des intervalles réellement utilisés[284].

[282] obtenus par processus de métabole, soit par glissement d'une note du tétracorde (ou par modification des valeurs de deux intervalles conjoints, à somme égale).
[283] Le concept de modélisation est explicité plus loin dans le texte.
[284] Comparer avec les définitions d'Aristoxène de Tarente pour la musique (grecque ancienne), et avec cet extrait du New Grove : « *Aristoxenus recognized three basic genera of tetrachords [...] The intonations were created by the two middle notes of the tetrachord, which were "movable" (kinoumenoi), in relation to the two outer notes, which were "immovable" (hestòtes). To describe these intonations Aristoxenus posited (i.21-7 : da Rios, 28.3-35.8) a tetrachord of two and a half tones, with the tone itself consisting of half tones, third tones and quarter tones. Specific numerical terms are avoided because his descriptions are intended to be approximations; the shades are not actually fixed but infinitely variable within their regions (i.23 : da Rios, 30.14-16). The character of the genera is not perceived in a particular order of specific intervals arranged sequentially in a static scale but rather in characteristic dynamic progressions of intervals, or "roads" (hodoi), that differ in ascent and descent (iii.66-72 : da Rios, 83-9). These progressions are readily recognizable, even though the exact sizes of the intervals may vary from piece to piece. In order to convey the characteristic quality of the genera, the theorist does not need to specify every possible note and interval but rather the relative sizes of interval and their typical patterns of succession. So, Aristoxenus was able to reduce the infinite number of possible arrangements to a manageable series of archetypal genera* », in [Mathiesen, Thomas J. (e.a.) : « Greece », *NG*, t. 10, p. 338-339 – pour la citation, p. 338-339].

Remarque : la pratique de la musique arabe modale (car il en existe une autre, tonale) est généralement heptatonique, avec des intervalles réellement utilisés qui sont de l'ordre de 80 à 120 cents (approximativement un demi-ton), de 130 à 170 cents (approximativement ¾ de ton), de 200 cents (plus ou moins 20 cents) soit approximativement un ton, et de l'ordre de 280 à 320 cents, soit approximativement un ton et demi pour ce dernier cas. Le « quart » (l'intervalle en tant que tel) n'est pas attesté dans la pratique maqâmienne, et les 5/4 sont peu utilisés, mais correspondent aussi à une approximation d'un intervalle compris entre 230 et 270 cents : les intervalles plus grands que le ton et demi (plus grands que l'intervalle correspondant à l'intervalle central du genre ĥijâz) ne sont pas, pratiquement, utilisés (en musique maqâmienne heptatonique) bien qu'un jins (genre) bien particulier de la musique arabe semble devoir comporter un intervalle de 2 tons (le « turaf » équivalent à 3,8,2 en notation « par quarts »). Un maqâm Râst (ou plutôt son échelle) peut donc être approximé (approché), par exemple, par la combinaison 4 3 3 4 4 3 3 ; qu'il soit joué avec une troisième note un peu plus haute ne change pas la nature de la combinaison, puisque le chiffre 3 correspond à une approximation, et pourrait être noté 3^+, par exemple, et la combinaison deviendrait 4 3^+ 3^- 4 4 3 3 : l'intervalle réel a changé, mais la combinaison n'a pas besoin de changer puisque le 3 atteste ici uniquement l'existence (et pas la valeur réelle) d'un intervalle intermédiaire et un seul entre le demi-ton et le ton. Pour mieux saisir ce raisonnement, essayons de modéliser l'échelle du Râst avec des intervalles multiples du demi-ton, ce qui donnerait quelque chose comme 2 1^+ 1^+ 2 2 1^+ 1^+ ou 2 2^- 2^- 2 2 2^- 2^- ou encore (par exemple et pour rester cohérent) 2 1^+ 2^- 2 2 1^+ 2^- ; dans ces derniers cas, c'est la nature même du mode qui change, puisqu'une dernière possibilité de notation est, bien sûr, 2 2^- 1^+ 2 2 2^- 1^+, ce qui nous ramènerait au système majeur occidental, mais que la notation précédente correspond au mode dorien (Jazz), ou mode de RÉ. Dans le cas de l'approximation par quarts, le 3 (par exemple) atteste l'existence d'un intervalle intermédiaire qui change la perception du mode, mais sa valeur réelle (+ ou - un comma) n'est plus ici significative puisque l'échelle modale sera identifiée comme telle, que le 3 (quarts) soit équivalent à 3^+ ou à 3^- . En poursuivant le raisonnement, pourquoi ne pas modéliser en commas? Eh bien parce que, en pratique, il n'existe pas un nom de note différenciant le SÎKÂ (MI demi-bémol) « haut » (soit 3^+) du « bas » (3^-) ou du « moyen » (3) : la perception du mode ne change pas pour le musicien (oriental), même s'il perçoit très clairement que le SÎKÂ est plus bas ou plus haut que le SÎKÂ correspondant à sa tradition musicale propre ; cela reste toujours un degré SÎKÂ (la définition de l'oreille peut peut-être aller au delà du comma, la perception de l'intervalle au sein d'une combinaison maqâmienne ne change pas). Enfin, considérons le cas du genre râst (4 3 3) : une altération commatique des intervalles ne mène pas à un changement de perception chez le musicien arabe ; en effet, si nous considérons que (4^- 3^+ 3) peut être équivalent à (3^+ 4^- 3), nous confondons dans ce cas le jins (genre) râst avec le jins (genre) \`irâq (un des noms de la combinaison 3 4 3), ce qui n'est pas acceptable pour le cas de la musique arabe, et qu'il n'y a pas, dans la littérature ou dans la pratique (la seule exception est Allâwîrdî, mais ses références sont inconnues et ses prémices douteuses – la pratique musicale contredit de toute manière ses assertions) de description commatique d'un jins qui serait ***intermédiaire*** *entre le jins râst et le jins \`irâq (ainsi que pour tous les autres) ; nous sommes donc soit en présence du jins râst, soit du jins \`irâq (soit encore un jins \`ajam 442 si nous considérons que les variations affectent le deuxième et le troisième intervalle), et, en poursuivant notre raisonnement jusqu'au bout, la combinaison 4 3 3 correspond à une seule et même possibilité, quelles que soient les altérations commatiques qui lui sont appliquées : les chiffres « 3 » sont là uniquement pour nous rappeler que l'intervalle en question est intermédiaire entre les 2/4 et les 4/4 de ton, et égal à 3/4 de ton « à peu près ». Il n'en reste pas moins qu'il ne peut exister (qualitativement) qu'un et un seul type d'intervalle intermédiaire entre le 1/2 ton et le ton qui puisse être combiné avec d'autres intervalles, intermédiaires ou non.*

Enfin, même si nous raisonnons en intervalles « commatiques » pour créer des combinaisons d'intervalles, il nous faudra toujours inclure un critère de sélection des intervalles tel que 8 7 6 – en commas - soit équivalent à 9 9 5, soit au jins râst, ou alors cette combinaison sera assimilée au 7 7 5 – en commas soit le jins şibâ (3 3 2 en quarts), soit à un autre jins exprimé en multiples de quart de ton : les cas intermédiaires n'existant par définition pas et devant être rapportés aux combinaisons « par quart », l'approximation en quart de ton devient suffisante pour la statistique combinatoire ET pour une description différenciée (et unique) de l'échelle approximée.

Détermination du nombre maximum de combinaisons modales au sein de l'échelle de la musique arabe ramenée au 1/4 de ton approximatif : détermination et filtrage des systèmes résultants

- ***Introduction***

Parmi les auteurs passés en revue en première partie de ce volume, deux se sont aventurés à chiffrer par le calcul le nombre de maqâmât (ou plutôt d'échelles distinctes maqâmâles) potentiels de la musique arabe : Allâwîrdî part d'un postulat (genres différenciés au comma près et création de genres commatiques intermédiaires) qui déjà à la base ne correspond pas à la réalité de la perception (par les musiciens et les auditeurs) musicale, tout en faisant l'erreur de combiner des genres entre eux sans prendre en compte l'existence de maqâmât (échelles) redondantes suite au processus du tarkîb ; Ṣâliĥ (qui ne prétend pas à l'exhaustivité) ne considère que quatre genres au sein d'une dizaine (ou trentaine selon les critères) possibles, et seulement en quarte juste – le postulat plus général du tarkîb comme méthode unique de génération d'échelles maqâmâles est également réducteur, certaines musiques de la zone du maqâm (arabe ou plus généralement orientales) ne reconnaissant pas les genres et l'analyse qui en découle.

Comment déterminer le nombre exact d'échelles modales dans l'absolu, en prenant en compte les redondances ainsi que les critères musicaux inhérents à toute civilisation? Ceci est partiellement l'objet de cette deuxième partie.

- ***Exposé mathématique du problème***

En considérant que les modes (maqâmât) de la musique arabe peuvent être représentés par des suites ordonnées d'intervalles approximativement multiples du quart de ton, au sein d'une gamme dont le plus petit intervalle est le demi-ton (ou des intervalles s'y rapportant), et que le plus grand intervalle réellement utilisé soit le « un ton et demi » ou l'intervalle ĥijâz, comme précisé par ailleurs[285], en sachant de surcroît que les systèmes (suites ou combinaisons d'intervalles caractéristiques) de la musique arabe appartiennent, sauf exception, à la grande famille de l'heptatonisme, nous pouvons énoncer le problème de base pour la génération et la reconnaissance des systèmes musicaux pouvant exister de la manière suivante :

- ***Enoncé mathémathique général***

Soit deux nombres entiers positifs imin et imax, tous deux inférieurs à une somme limite « sum_init », et tels que imin < imax. Soit un entier positif NI tel que NI soit plus petit ou égal à sum_init.
Trouver le nombre « NS(NI) » de combinaisons à « NI » rangs de nombres entiers successifs, de valeur comprise entre les deux bornes « imin » et « imax », de telle manière que la somme de ces nombres entiers soit égale à la somme donnée « sum_init » .
Trouver une formule qui permette de reproduire explicitement les « NS(NI) » combinaisons.

- ***Enoncé mathémathique particulier (musique arabe heptatonique)***

Soit …
Trouver le nombre « NS(7) » de combinaisons à 7 rangs de nombres entiers successifs, de valeur comprise entre les deux bornes « imin = 2 » et « imax = 6 », de telle manière que la somme de ces nombres entiers soit égale à une somme donnée « sum_init = 24 » .
Trouver …

Remarque : pour mieux déchiffrer l'énoncé, considérons qu'une échelle modale, indépendamment de la hauteur absolue de la tonique (ou première note-hauteur du mode pour cette définition) peut être représentée par une suite ordonnée d'intervalles qui la caractérise ; pour le mode majeur occidental, par exemple, cette suite serait (en multiples de 1/4 de ton) 4 4 2 4 4 4 2, soit, pour un mode majeur en DO, un ton (passage à RÉ), un ton (passage à MI), un demi-ton (passage à FA), etc. Pour trouver toutes les combinaisons possibles de différents intervalles pouvant former une échelle modale, il faut d'abord déterminer l'ambitus de ces intervalles au sein de l'octave ; cet ambitus est représenté par les deux termes « imin » et « imax » qui représentent respectivement l'intervalle le plus petit (borne inférieure) et l'intervalle le plus grand (borne supérieure) pouvant exister au sein d'une échelle donnée. Dans le cas de la musique arabe, par exemple, tout semble indiquer que l'intervalle minimum « imin » peut être approximé par le demi-ton (imin = deux quarts de ton) et que l'intervalle imax peut être approximé par l'intervalle ĥijâz équivalent au ton et demi (imax = six quarts de ton). Dans ce cas de figure, les intervalles intermédiaires pouvant exister au sein d'une suite ordonnée d'intervalles seront les intervalles de 3/4, 4/4 et 5/4 de ton, ou 3, 4, et 5 en multiples de quart de ton (notation RS). Ces deux nombres (imin et imax) doivent être inférieurs à l'intervalle d'octave (24 quarts de ton) sinon aucune combinaison n'est possible, et imin doit être inférieur ou égal à imax.

[285] Pour ces différents postulats, le lecteur est prié de se reporter à la première partie de ce volume.

Par ailleurs, le critère de somme initiale correspond ici en fait à l'octave (24 quarts de ton), mais peut avoir une valeur différente : en effet, nous pouvons considérer que certains modes traditionnels (plus précisément leurs échelles modales) sont plus petits que l'octave (lo), avec une somme initiale également plus petite que l'octave (sum_init < 24), ou plus grands que l'octave (modes « go », sum_init > 24). Plus généralement, le critère « sum_init » sert à fixer la somme des intervalles considérés au sein d'une suite ordonnée (système).

NI est le nombre d'intervalles que peut comporter un système : sept pour des systèmes heptatoniques, cinq pour des systèmes pentatoniques, etc., et en tout état de cause plus petit que sum_init, sinon la somme des intervalles composant un système sera nécessairement plus grande que cette dernière valeur (si NI est égal, par exemple, à 25 intervalles à l'octave dans le cas d'une simulation en multiples de quart de ton pour des systèmes octaviants avec sum_init == 24, la valeur minimale de la somme des 25 intervalles sera égale à 25 quarts de ton, plus grande que la valeur de l'octave == 24 quarts de ton).

*A partir de ces données, il est demandé de trouver le nombre de combinaisons des NI intervalles compris entre imin et imax (inclus) de sorte que leur somme soit égale à la somme initiale « sum_init », et de reproduire la totalité de ces systèmes, tout en éliminant les **redondances**.*

La solution de ce problème aurait pu être simple n'eût été la condition de somme imposée : en effet, le nombre de valeurs que peut prendre un intervalle (ou un entier) compris entre imin et imax équivaut à

$$\textbf{n\_int\_car = imax - imin + 1} \qquad \textbf{(I)}$$

n_int_car étant le nombre d'intervalles caractéristiques du problème.

Sur l'exemple de l'énoncé particulier, n_int_car = 6 – 2 + 1 = 5 intervalles caractéristiques (dont les valeurs sont 2, 3, 4, 5 et 6) ; c'est le nombre de valeurs que peut prendre la variable que constitue un intervalle multiple du quart de ton, au sein du segment <imin←→imax>, avec imin = 2, imax = 6 (bornes comprises).

Dans le cas général, le nombre « NAS » (nombre absolu de systèmes) de combinaisons des NI intervalles (nombres) compris entre n1 et n2 équivaut à

$$\mathbf{NAS = n\_int\_car^{NI}} \qquad \textbf{(II)}$$

soit

$$\mathbf{NAS = (imin - imax + 1)^{NI}} \qquad \textbf{(II')}$$

Dans le cas de l'énoncé particulier, NAS = 5^7 == 78125.

Reste à appliquer la *condition de somme* telle que l'addition (la somme) des valeurs des intervalles conjoints corresponde (soit égale) à une valeur donnée :

$$\sum_{n=1}^{n=NI} \mathbf{C(In) = sum\_init}, \quad \mathbf{(imin <= In <= imax, NI < sum\_init)} \qquad \textbf{(III)}$$

où la fonction « C » correspond à une combinaison des NI intervalles In (I1, I2 … INI), ce qui donne, dans le cas particulier,

$$\sum_{n=1}^{n=7} \mathbf{C(In) = 24}\ , \qquad \mathbf{(2 <= In <= 6, NI = 7)} \qquad \textbf{(III')}$$

Je n'ai pas pu trouver de solution analytique satisfaisante à ce problème, et à fortiori pas de formule permettant de reproduire toutes les combinaisons possibles.

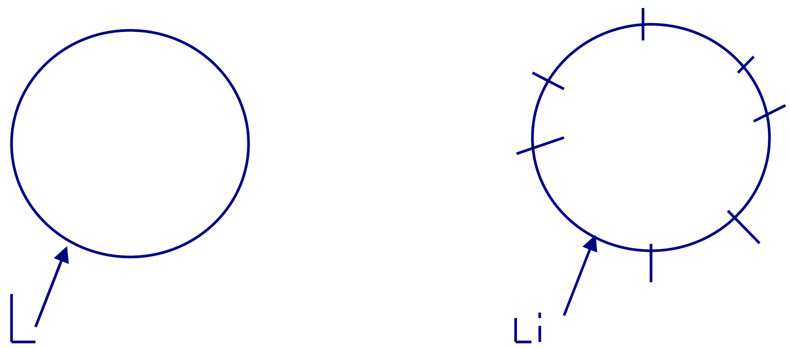
Dans le cas de non existence de solution purement analytique, peut-on envisager d'autres solutions? Un autre énoncé du même problème pourrait en être une reformulation géométrique, ou encore trigonométrique.

- ***Enoncé géométrique général***

Soit un cercle de longueur L, divisé en un nombre entier positif « sum_init » d'arcs de cercle dont la longueur équivaut à des multiples de L/sum_init (voir figure ci-dessous).
Déterminer l'ensemble (A) des combinaisons de subdivisions possibles en NI (NI = 2 à 7) d'arcs de ce cercle, sachant que les arcs (Li) peuvent prendre des valeurs entières positives comprises entre deux nombres « imin » et « imax », tous deux entiers positifs et inférieurs à L, et tels que imin < imax.

Dans ce dernier énoncé, il y a évidemment un raccourci (par rapport au premier) puisque ce qu'il faut trouver est l'ensemble des combinaisons possibles (ce qui équivaut à trouver le nombre de combinaisons ainsi qu'à formuler les combinaisons en tant que telles).

Figure n° 6. **Division d'un cercle en intervalles conjoints quelconques (ni = 7)**

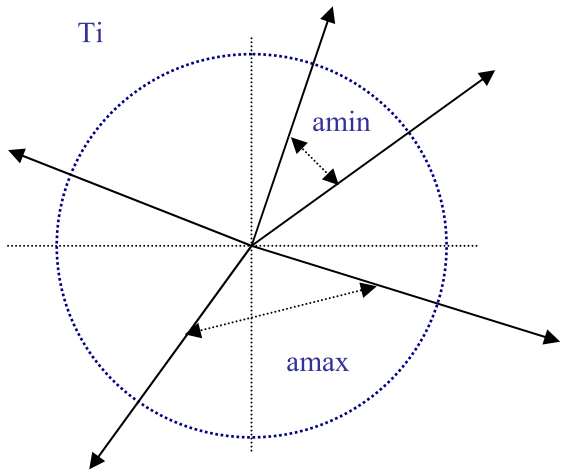


Un troisième énoncé pourrait être trigonométrique (voir figure ci-dessous) :

- ***Enoncé trigonométrique général***

Trouver l'ensemble (A) de combinaisons de NI angles successifs « Ti » dont la somme équivaut à 360 degrés, et dont les valeurs sont comprises entre (y compris) une valeur minimale « amin » et une valeur maximale « amax », ces deux dernières valeurs étant multiples de la valeur 360/sum_init, amin, amax et « sum_init » étant donnés entiers positifs (voir figure ci-dessous).

Figure n° 7. **Combinaison d'angles (ni = 5)**



Bien que l'énoncé du problème soit de plus en plus concis d'une formulation à la suivante[286], je n'ai pas pu trouver de solution analytique (formule mathémathique) pour l'un quelconque des trois énoncés : il se peut qu'un spécialiste en

[286] Les trois énoncés sont en fait équivalents, et correspondent à différentes manières d'exposer le même problème à résoudre.

analyse combinatoire, en géométrie ou en trigonométrie puisse trouver une formule pour déterminer le nombre de systèmes octaviants (combinaisons dans les conditions explicitées plus haut) possible, mais sera-t-il possible même dans ce cas de trouver une formule qui nous donne les valeurs et les rangs des intervalles de tous les systèmes résultants?

Cette possibilité me semblant peu probable[287], l'étape suivante consiste à envisager une **modélisation mathématique** du problème.

> *Remarque : le choix des données initiales est en général assez arbitraire ; il aurait été aussi possible de définir le nombre d'intervalles caractéristiques comme étant, avec la valeur imin par exemple, une donnée de base (ou initiale). Dans ce cas, la valeur de imax serait déduite de la formule I de la manière suivante :*
>
> *imax = n_int_car + imin - 1 (I')*
>
> *Dans l'exemple donné plus haut, imin serait égal à 2 et n_int_car = 5, d'où imax = 5 + 2 – 1 = 6. Les choix qui ont été faits m'ont été dictés, en général, par la nécessité de simplifier conceptuellement la mise en forme des données de manière à me conformer le plus possible à une définition instinctive, pour un musicien, du problème à résoudre.*

[287]De fait, même en cas de solution analytique relativement simple, les mathématiques pures sont ici de peu d'utilité : l'existence de critères supplémentaires, qui seront exposés par la suite et qui traduisent des contraintes musicales, rend indispensable, au stade actuel de la technique mondiale et vu le nombre de critères (et de systèmes musicaux) en jeu, le recours à l'informatique.

LE CONCEPT DE MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Une modélisation mathématique d'un phénomène physique ou chimique (par exemple l'écoulement de l'eau d'une rivière, la propagation d'un feu de forêt, les prévisions météo, etc.) équivaut en fait à une mise en équations de ce phénomène du point de vue de la **simulation** d'un ou de plusieurs aspects de son déroulement.

La **modélisation** est une **approximation** de la réalité, et elle est considérée comme satisfaisante quand elle reproduit, pour tous les cas de figure et toutes les **données de départ (données initiales)**, des résultats suffisamment proches des résultats réels pour être considérés comme « vrais », ou satisfaisants. Dans son principe, la modélisation fait appel à la discrétisation de valeurs continues en valeurs approchées, concept abordé plus haut dans le texte.

L'exemple type (le plus simple) d'une modélisation-simulation est la formule mathématique : dans l'exemple le plus connu, soit la formule de l'énergie potentielle d'un corps de masse m ($E = mc^2$), l'énergie (E), la masse (m) ainsi que la vitesse de la lumière (c)[288] sont ramenées à des valeurs calculées et approximatives mais qui donnent une estimation satisfaisante des valeurs réelles approximées (ici théoriques). La simulation consiste en l'équation entre l'énergie (E) et la formule (mc^2) reliant la masse (m) et la vitesse de la lumière (c), qui *simule* (ici, de manière simplifiée) le processus de transformation de la matière en énergie.

Dans le cas de la génération de systèmes d'intervalles musicaux, la modélisation mathématique des intervalles consiste en l'approximation de ces intervalles en multiples de quarts de ton ; la simulation consiste en le processus de **génération** de systèmes intervalliques ainsi qu'en les processus de **rangement** et de **filtrage** de ces systèmes. Cette simulation doit remplir certains **critères** de sélection et de filtrage, définis par l'opérateur, de manière à reproduire au plus près une situation passée (approximation statique ou dynamique de la réalité) ou une projection théorique (recherche ou prévisions[289]).

L'ensemble des processus de modélisation et de simulation, agrémenté des critères de sélection et de filtrage et précisé par les données initiales, doit nous permettre de reproduire tout ou partie (caractéristique) du phénomène observé, et d'extrapoler les résultats (en appliquant des critères différents ou modifiés, ou encore en changeant les données initiales) de manière à nous donner une vision suffisamment précise du comportement du phénomène dans des conditions variées, définies par l'opérateur.

Dans les énoncés du problème de génération de systèmes intervalliques, les conditions aux limites sont les **bornes** *imin* et *imax* des intervalles considérés, la somme initiale de l'ensemble des intervalles compris dans un système, ainsi que le nombre d'intervalles composant le dit système. Les valeurs du type *n_int_car* (nombre d'intervalles caractéristiques) sont des *valeurs calculées* et *secondaires*. Les résultats consistent en le nombre de systèmes générés et leurs valeurs respectives, ainsi qu'en les valeurs successives (*résultats intermédiaires*) de ces *résultats primaires* après passage par les différents filtres et critères de sélection qui leur sont appliqués.

Dans le cas ou une (ou plusieurs) formule(s) mathématique(s) ne permet(tent) pas de simuler-modéliser un phénomène quelconque, la science actuelle fait appel à l'informatique qui permet, au travers de *calculs itératifs* (approximations successives d'un résultat recherché) et de *vérifications aux bornes* (vérification à toutes les étapes du calcul de la conformité du résultat en cours aux données de base et aux conditions limites imposées par l'opérateur), de recréer le processus de déroulement du phénomène en question : la modélisation-simulation de la génération de systèmes intervalliques dont les résultats sont exposés par la suite est donc une **modélisation informatique**.

[288] La vitesse de la lumière « c » est considérée dans cette formule comme une constante : des recherches récentes tendent à démontrer l'existence d'une fluctuation (très réduite) de cette vitesse selon les conditions de l'espace dans lequel la lumière se propage (voir Magueijo, João : « *Faster than the speed of light* », Heinemann, Londres, 2003). Relativisons : Paul Davies, professeur de philosophie naturelle au Centre australien d'Astrobiologie de l'Université Macquarie (Sydney) précise (dans un article du Prospect, de Londres, repris dans Courrier International du 7 au 14 mai 2003) que c'est la « constante de structure fine » (dont la vitesse de la lumière constitue une des composantes) qui pourrait s'avérer variable – mais ceci est une autre histoire.
[289] Météo, par exemple.

PRINCIPES DE DÉTERMINATION PAR LE CALCUL INFORMATIQUE DE L'ENSEMBLE DES SYSTÈMES DE HAUTEURS (COMBINAISONS INTERVALLIQUES) AU SEIN DE L'ÉCHELLE DE LA MUSIQUE MODALE AVEC DES INTERVALLES APPROXIMÉS EN MULTIPLES D'UN INTERVALLE DE RÉFÉRENCE - CONCEPTS DE BASE D'UNE MÉTA-THÉORIE DE LA MUSIQUE MODALE

Dans le sous-chapitre précédent, nous avons pu voir brièvement la question de la détermination analytique (formulation mathématique) de l'ensemble des systèmes (en réalité sous-systèmes) octaviants pour des valeurs données d'intervalles (comprises entre les valeurs minimum « imin » et maximum « imax ») et pour un nombre NI d'intervalles successifs, ainsi que le principe de la modélisation mathématique ou informatique ; rappelons-nous à ce stade que le principe de la modélisation mathématique consiste à approximer la réalité de manière suffisamment rapprochée pour satisfaire aux exigences du chercheur (ou, en l'occurrence, du musicien) : les résultats recherchés ici sont avant tout les différentes configurations possibles pour des combinaisons d'intervalles ramenés à des multiples d'un intervalle de base, ainsi que, dans une phase ultérieure, leurs caractéristiques internes et leur conformité aux modes existants dans la littérature ou utilisés dans la pratique musicale. Enfin, l'étude sur le plan macroscopique devra permettre de dégager des tendances de comportement, concept que j'explore en détail dans l'étude statistique.

Ceci étant posé, et le problème tel qu'énoncé dans la configuration exposée dans le sous-chapitre précédent ne semblant pas pour le moment avoir de solution analytique, il nous reste à trouver une solution informatique (modélisation), permise aujourd'hui avec l'ordinateur personnel : je propose ici de partir du particulier, sur un exemple précis, pour ensuite remonter à une formulation générale du problème et de sa solution. En l'occurrence, si nous reprenons l'exemple posé plus haut, soit des intervalles compris entre le demi-ton et un ton et demi, mais en le simplifiant (pour la démonstration) en limitant a) l'intervalle maximum à un ton entier, b) les intervalles intermédiaires à des multiples du demi-ton (soit uniquement le demi-ton et le ton), le problème à résoudre peut s'énoncer, dans ce cas particulier, comme suit :

- ***Enoncé du problème particulier en multiples de demi-ton***

Soit une suite de sept nombres i, j, k, l, m, n, o, dont la valeur équivaut à 1/2 ou à 1 : trouver l'ensemble (A) des combinaisons possibles de ces 7 nombres telles que leur somme soit égale à 6 (sous-entendu : 6 tons, 12 demi-tons ou encore 24 x 1/4 de ton à l'octave).

Il y a plusieurs manières de résoudre ce problème en informatique : j'expose ci-dessous le raisonnement qui m'a permis de mettre au point la série de programmes que j'ai utilisés dans le cadre de cette thèse.

- ***Résolution du problème particulier :***

Prenons une combinaison dont les intervalles (pour les nommer par leur nom) seraient tous égaux à la valeur minimale permise (soit dans ce cas au demi-ton) ; la suite « i, j, k, l, m, n, o » (appelons-les, pour plus de commodité, a1, a2, a3, a4, a5, a6 et a7) équivaudrait alors à une suite du type (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2), dont tous les constituants sont égaux entre eux, et dont la somme vaudrait 3,5 (tons) : cette combinaison ne satisfait évidemment pas à la condition initiale où la somme des intervalles devrait être égale à 6 (tons, soit 12 demi-tons).

Pour améliorer l'approximation (ici très outrée) de l'octave, augmentons, à partir de l'intervalle de plus haut rang (ici a7), la valeur de l'intervalle en question jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur maximale permise (ici le ton entier) : une première incrémentation nous donne la suite (combinaison) d'intervalles suivante

(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1)

dont la somme équivaut à 4 tons (ou 8 demi-tons à l'octave) ; ce qui est encore une fois en dessous de la valeur totale (sum_init == 12 demi-tons, ou sum_init == 6 tons) à atteindre.

L'intervalle a7 ayant atteint son maximum (imax = 1), nous ne pouvons plus l'augmenter : nous pouvons, par contre, augmenter l'intervalle de rang immédiatement inférieur (ici a6) d'un demi-ton, ce qui nous donne la combinaison suivante

(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1, 1)

dont la somme équivaut à 4,5 tons (ou à 9 demi-tons) à l'octave, ce qui, manifestement, ne remplit toujours pas la condition initiale d'une somme de 6 tons (ou 12 demi-tons) à l'octave énoncée dans le problème de base.

En poursuivant le raisonnement (et les incrémentations successives) nous nous rendons compte que, selon cette méthode de recherche, le premier système (ou sous-système) satisfaisant à la condition initiale

$$\sum_{i=1}^{i=NI} ai = sum\_init \qquad \text{(III)}$$

énoncée plus haut (avec sum_init == 12 demi-tons ou == 6 tons, et pour NI = 7 intervalles) est le système

(1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1) (a)

dont la somme des intervalles vaut 6 (tons), ou 12 (demi-tons).

Le système (1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1) équivaut donc bien à un système octaviant, composé de sept intervalles dont la valeur est égale à un multiple du demi-ton, avec des intervalles valant au plus un ton entier. Ce système nous permet déjà de déterminer 7 sous-systèmes par décalage du premier intervalle (ou par rotation), soit

Sous-système (« s_s ») n°1 : (1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1)
Sous-système (« s_s ») n°2 : (1/2, 1, 1, 1, 1, 1, 1/2)
Sous-système (« s_s ») n°3 : (1, 1, 1, 1, 1, 1/2, 1/2)
Sous-système (« s_s ») n°4 : (1, 1, 1, 1, 1/2, 1/2, 1) (b)
Sous-système (« s_s ») n°5 : (1, 1, 1, 1/2, 1/2, 1, 1)
Sous-système (« s_s ») n°6 : (1, 1, 1/2, 1/2, 1, 1, 1)
Sous-système (« s_s ») n°7 : (1, 1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1)

que je nommerai à partir de ce point les « sous-systèmes » (ou « décalages ») du système de base (1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1) trouvé à travers l'algorithme de calcul exposé plus haut.

Ces sous-systèmes composent ce que j'appellerai dorénavant un système « chromatique », car il comporte deux demi-tons successifs (à part pour le sous-système n°2 pour lequel les demi-tons se succèdent à l'octave) dans sa série d'intervalles constitutifs. Dans le cas particulier du sous-système n°2, une extension à la double octave (à l'identique) de la combinaison d'intervalles générée donne la suite suivante

(1/2, 1, 1, 1, 1, 1, 1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1, 1/2)

qui comporte bien une suite de deux intervalles successifs 1/2 (dont la valeur est égale à un demi-ton). En représentation par contenu (voir lexique), ces systèmes on un contenu <u>brut</u> (non-rangé) équivalent à 250 (en multiples de demi-ton compris entre le demi-ton et le ton et demi) ou à 20500 (en multiples de quart de ton, idem) : dans le cas particulier que nous traitons ici, il est aisé de se rendre compte que cette représentation RC est la seule et unique possible, puisque les conditions initiales permettent l'existence de deux types d'intervalles caractéristiques seulement, et que toute modification du nombre de l'un quelconque de ces intervalles caractéristiques (ici 1/2 ton et ton) va entrainer une modification équivalente (et en sens contraire) du nombre d'intervalles équivalents à l'intervalle caractéristique restant, et la somme des intervalles sera automatiquement différente de la somme initiale posée comme condition de constitution du système. En clair, et pour cet exemple précis, l'incrémentation[290] du nombre d'intervalles équivalents au demi-ton entraine une décrémentation[291] du nombre d'intervalles équivalents au ton, d'où une représentation RC équivalant à 30400 et une somme totale de cinq tons et un demi-ton, inférieure à la somme initiale que nous désirons atteindre, tout comme le processus inverse (10600 en RC) donne une somme totale de 6,5 tons, supérieure à notre somme initiale : nous sommes bien donc dans le cas particulier où cette notation RC est la seule et unique possible et ce, pour tous les systèmes pouvant exister avec ces données initiales.

Ce système-ci (a) étant déterminé, reste à trouver éventuellement d'autres systèmes, octaviants aussi (dont la somme des intervalles constitutifs est égale à 6 tons) ; deux choix s'imposent ici à nous : soit une combinaison interne des intervalles selon leur valeur donnée (échanger le rang des intervalles) soit continuer le processus de génération appliqué plus haut (ou un processus similaire).

[290] Augmentation d'une unité caractéristique dans le système de calcul choisi – ici, d'une unité.
[291] Diminution d'une unité caractéristique dans le système de calcul choisi – ici, d'une unité.

Essayons d'appliquer le premier processus (échange des intervalles)[292] : en reprenant la combinaison (a), soit (1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1), identifions le premier intervalle (a1) par son soulignement soit

(1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1)

En échangeant les intervalles successivement de gauche à droite, nous obtenons les systèmes suivants :

Système par échange n°1 : (1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1)
Système par échange n°2 : (1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1) (équivaut au système par échange n° 1)
Système par échange n°3 : (1/2, 1, 1/2, 1, 1, 1, 1)
Système par échange n°4 : (1/2, 1, 1, 1/2, 1, 1, 1)
Système par échange n°5 : (1/2, 1, 1, 1, 1/2, 1, 1) (équivaut au système par échange n° 4)
Système par échange n°6 : (1/2, 1, 1, 1, 1, 1/2, 1) (équivaut au système par échange n° 3)
Système par échange n°7 : (1/2, 1, 1, 1, 1, 1, 1/2) (équivaut au système par échange n° 1)

(c)

Comme indiqué entre parenthèses, le système par échange n°2 est équivalent au système n°1 (même suite d'intervalles), le système n°5 équivaut au système n°4 (décalage en position 4 de ce dernier système), etc. Nous nous trouvons donc en face de trois, et uniquement trois, systèmes indépendants (non-redondants) de hauteurs dans le cadre de l'énoncé plus haut.

En choisissant de continuer ce processus et d'échanger les rangs de l'intervalle suivant (a2) avec les autres, et en partant de la combinaison (III) mais dans laquelle l'intervalle à échanger serait l'intervalle n°2 (a2) soit l'intervalle souligné dans la combinaison suivante

(1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1)

il est aisé de se rendre compte que ce système équivaut d'ores et déjà au système par échange n°2 de la suite (c) plus haut : l'échange produirait donc des systèmes équivalents à ceux de la suite (c), et n'apporterait pas d'éléments nouveaux pour notre démarche. Il est possible de se rendre compte que le passage aux autres intervalles (de rang supérieur à a2) ne donnerait pas non plus de résultats différents.

Comme nous le voyons, le système d'échange paraît simple mais nous impose de vérifier la redondance entre les systèmes pour éliminer les doublons : ce qui paraît accessible (et relativement simple) pour deux valeurs possibles (le demi-ton et le ton) peut par contre être plus difficile à mettre en œuvre si nous avons plus que deux types d'intervalles potentiels ; en effet, et si l'intervalle maximum n'était plus limité à un ton entier, mais à un ton et demi, une des combinaisons pouvant exister serait

(1/2, 1 1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1/2) (d)

Les combinaisons par échange d'intervalles dans ce dernier cas deviendraient nettement plus compliquées, et les vérifications beaucoup plus fastidieuses (surtout à la main) : la procédure d'échange telle que décrite plus haut ne serait plus applicable telle quelle, et nécessiterait un nouvel aménagement du calcul.

Une autre option, comme je le cite plus haut, serait de poursuivre le processus de génération initial [ayant abouti à la génération du premier système (a)] jusqu'à épuisement des possibilités : cela pourrait se faire par le passage du système (a) équivalant à

(1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1)

au système de transition (a') dans lequel l'intervalle de rang immédiatement inférieur (dans ce cas précis de rang 2) au dernier intervalle incrémenté serait incrémenté à son tour, et dans lequel tous les intervalles de rang supérieur (dans ce cas précis de rangs 3 à 7) seraient remis à la valeur minimale (dans notre cas 1/2 ton), soit

(1/2, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2) (a')

A partir de là, le même processus d'incrémentation serait appliqué aux intervalles de rang inférieur, débutant par l'intervalle de rang maximal (ici a7), ce qui aboutirait aux systèmes transitoires (ne satisfaisant pas la condition initiale sum_init == 6 tons) suivants :

(1/2, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1)

[292] Les lecteurs familiers avec l'analyse combinatoire auront remarqué que l'échange d'intervalles n'est envisageable ici que parce que les seuls intervalles possibles sont le ton et le demi-ton : dans le cas d'existence d'intervalles différents, nous sortons du cas particulier et la combinaison 20500 n'est plus la seule possible, et ce raisonnement n'est de ce fait plus applicable.

(1/2, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1, 1)
(1/2, 1, 1/2, 1/2, 1, 1, 1)

jusqu'à aboutir au système

(1/2, 1, 1/2, 1, 1, 1, 1) (e)

qui équivaut au système par échange n°3 de la série (c) plus haut.

Remarque :
Pour garder une systématique « continue » des calculs, la démarche la plus « directe » aurait été d'incrémenter l'avant dernier intervalle (ici a6) et de reprendre le processus à partir de là, ce qui aurait généré une quantité nettement plus grande de systèmes transitoires : le fait qu'il ait fallu mettre à leur valeur maximale tous les intervalles de rang supérieur à l'intervalle en cours permet de court-circuiter cette phase ; en effet, il est simple de vérifier que la somme des intervalles du premier système transitoire (a') est inférieure ou égale à la valeur sum_init, par le raisonnement suivant :

Soit le premier système octaviant (a), équivalant à la combinaison d'intervalles (a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7) et dont les intervalles a3 à a7 sont maximisés (de valeur imax), et soit le premier système transitoire (a') tel que le premier intervalle de rang inférieur aux intervalles maximisés soit égal à l'intervalle minimum incrémenté de la valeur de base (ici le demi-ton) et exprimé par la suite (a1', a2', a3', a4', a5', a6', a7') : les intervalles de la combinaison (a') pris un à un sont plus petits ou égaux aux intervalles correspondants de la suite (a), à part l'intervalle en cours d'incrémentation (ici a2') qui est plus grand que son correspondant dans le système (a) (ici a2) ; mais comme, par définition, au moins un des intervalles de rang supérieur (à commencer par le dernier) dans le système (a) est plus grand que son correspondant dans le système (a'), la somme des intervalles du système (a') est nécessairement plus petite ou égale à la somme des intervalles du système (a), lui-même égal à sum_init : d'ou la somme des intervalles du système (a') est nécessairement plus petite ou égale à la somme des intervalles de la combinaison (a).

Dans le cas de cet exemple précis, la somme des intervalles de la combinaison (a') vaut 4 (tons), effectivement plus petite que la somme des intervalles de la combinaison (a) qui vaut, comme nous l'avons vu plus haut, 6 tons (système octaviant).

En appliquant à ce système (e) le processus inverse à celui appliqué au système (a), soit en incrémentant l'intervalle de rang supérieur le plus grand (ici a3) à ne pas avoir déjà été incrémenté dans cette série (car nous n'avons pas encore épuisé les possibilités de génération d'intervalles entre les intervalles de rang 2 et de rang 4), le premier système transitoire suivant le système (e) serait

(½, 1, 1, ½, ½, ½, ½) (e')

En appliquant à nouveau le processus direct (incrémentation à partir du dernier rang), nous aboutissons, au bout de trois incrémentations, au système octaviant

(1/2, 1, 1, 1/2, 1, 1, 1) (f)

Ce dernier système est un système nouveau (équivalent au système par échange n°4) qui correspond au système de la musique tonale occidentale, en décalage n°7 (locrien), soit un mode de SI.

En poursuivant le raisonnement et les procédures de génération jusqu'au bout, nous nous apercevrons que les trois systèmes générés (a), (e) et (f), avec leurs décalages, sont représentatifs et constitutifs de l'ensemble (A) recherché dans l'énoncé plus haut.

Les deux processus de génération alternée[293] permettent donc de retrouver, par une procédure certe répétitive mais efficace, les systèmes pouvant exister dans le cadre des conditions initiales énoncées plus haut dans ce chapitre.

Cette procédure est en fait applicable quelles que soient les conditions initiales (quelles que soient les valeurs NI, imin, imax ou sum_init), en respectant les proportions imposées par la nature du problème (imin et imax plus petits que sum_init, imin plus petit que imax, et NI plus grand que un et plus petit ou égal à sum_init). Dans notre cas précis, le calcul démontre que les systèmes (a), (e) et (f) sont les seuls et uniques systèmes caractéristiques de l'ensemble (A), tous les autres systèmes (à partir de ce point nommés sous-systèmes) pouvant être générés par décalage de la tonique.

[293] (incrémentation à partir de l'intervalle de rang supérieur en remontant vers les intervalles de rang supérieur jusqu'à remplissage de la condition initiale « sum_init », puis incrémentation de l'intervalle de rang immédiatement inférieur à l'intervalle de rang le plus bas déjà incrémenté et remise à imin des intervalles de rang supérieur, etc.)

En partant du particulier (l'exemple précis énoncé plus haut) et en généralisant cette procédure, nous pouvons par exemple l'appliquer directement au cas non moins particulier de la musique arabe, pour des intervalles compris entre le demi-ton (imin) et le ton et demi (imax) et pour une somme totale de 24 quarts de ton (soit 6 tons à l'octave), ce qui nous permettrait de retrouver toutes les combinaisons possibles de NI intervalles multiples du quart de ton. De manière plus générale, nous pouvons ainsi retrouver l'ensemble (A) des combinaisons de NI nombres entiers compris entre imin et imax donnés, et dont la somme est égale à une valeur Sum_init également donnée.

C'est ce calcul des systèmes ainsi obtenus (avec des algorithmes améliorés et optimisés), ainsi que leur filtrage à l'aide de divers critères à vocation musicale, qu'effectue le programmes « modes » (versions 4 et suivantes) développé dans le cadre de cette thèse : la philosophie du programme ainsi que l'application des critères de filtrage aux systèmes générés sont développées dans le chapitre suivant.

Remarque : une autre procédure simplifiée mais « lourde »

Dans un premier temps, un autre algorithme de calcul, beaucoup plus simple, avait été mis au point pour la génération de systèmes de hauteur (version 1 à 3 du programme « modes ») : cette procédure consistait en la suite d'opérations suivantes (les exemples chiffrés correspondent à l'énoncé en demi-ton plus haut) :

1. *Choix d'un système de départ : ce système était fixé à ni intervalles minimum, soit égaux à imin, soit (½,½, ½, ½, ½, ½, ½).*
2. *Constitution d'un nombre entier par concaténation des NI intervalles, et en donnant au plus petit intervalle la valeur du nombre entier de multiples d'intervalle minimum correspondant, soit 1111111.*
3. *Incrémentation systématique en système décimal du nombre ainsi constitué, soit constitution des systèmes transitoires 1111112, 1111113, etc.*
4. *Vérification de la somme des chiffres constituant le nombre correspondant au système transitoire ainsi créé (par division du nombre par des puissances de 10 et remise à la puissance immédiatement inférieure de la partie après la virgule, puis répétition du processus jusqu'aux unités), soit par exemple pour le système 7543682 : 7543682/(10**^{6}) = 7,543682, d'ou un premier intervalle = 7, puis calcul de 7,543682 - 7 = 0,543682, multiplication par la puissance immédiatement inférieure soit 0,543682 x 10**^{6} = 543682, puis division soit 543682/(10**^{5}) = 5,43682 d'ou détermination du deuxième intervalle == 5 etc.*

La procédure comprend d'autres tests (existence du chiffre 0 dans le nombre-système, vérification du non-dépassement par le haut, soit dans notre cas le nombre 2222222, par exemple), et serait adaptée pour des calculs réduits : l'utilisation de nombres en base décimale limitait par contre la valeur de l'intervalle imax au chiffre 9 (soit 9 x ½ ton, ou 9 x ¼ ton, ou encore 9 fois le plus petit intervalle toléré par le calcul) ce qui éliminait la possibilité de recherche systématique pour des combinaisons comportant de grands (relativement) intervalles. La deuxième limitation provient du choix de la concaténation en un nombre entier : si ce procédé permet des incrémentations simples (par addition du nombre un), l'extension du nombre d'intervalles consécutifs au sein du système m'a amené très rapidement aux limites des possibilités du calcul informatique en nombres entiers (dépassement du plus grand nombre entier que peut reproduire l'ordinateur). À partir d'un certain nombre de systèmes générés, et surtout en fonction du nombre NI d'intervalles consécutifs, a commencé à se poser le problème du temps calcul nécessaire aux mises à la puissance et aux divisions successives (voir point n°4 de la remarque) : des problèmes de dimensionnement des variables (mémoire) sont aussi très vite apparus, ce qui, avec les inconvénients cités plus haut (et quelques autres résultants des tests à effectuer), m'a amené à adopter une philosophie de programmation complètement différente dont le principe est exposé plus haut.

Ces premières versions du programme ont permis cependant de tester et de valider partiellement les versions 4 et 5, cette dernière étant utilisée actuellement pour la génération de systèmes.

Il était par ailleurs possible d'envisager la génération de systèmes d'un point de vue tout à fait différent, basé sur la représentation par contenu : en effet, et comme nous l'avons vu plus haut, la combinaison (RC) 20500 est la seule et unique possibilité pour le cas particulier d'une musique en multiples de demi-ton avec des intervalles bornés entre le demi-ton et le ton, et il est possible de partir de ce postulat pour générer les systèmes correspondants. Cette procédure algorithmique a été proposée par Nicolas Meeùs, professeur à l'Université Paris IV – Sorbonne, et directeur de la présente thèse, au cours de discussions par courriel dans le courant de l'hiver 2002 : chronologiquement, l'utilité des hyper-systèmes (équivalents dans leur substance à la représentation RC) ne m'est apparue qu'au bout d'un processus de recherche axé sur les calculs statistiques, et mené de l'assise « large » (sous-systèmes) pour remonter à la structuration par systèmes et hyper-systèmes (voir l'Arbre des systèmes plus loin).

- ***Le programme « modes V5 » : fonctionnement, critères de filtrage des systèmes générés***

Le programme « modes V5 » génère des systèmes de hauteurs (combinaisons d'intervalles successifs) selon des conditions initiales et des variables fixées par l'utilisateur. L'entrée des données est libre, le programme n'étant pas une « boite noire », mais un outil de recherche ouvert ; certains tests de cohérence sont effectués, mais peuvent être annulés par l'utilisateur pour des recherches particulières : ces dernières possibilités seront abordées plus bas.

Variables du calcul informatique

Les variables essentielles à renseigner pour faire fonctionner le programme sont les suivantes :

Imin : soit le plus petit intervalle utilisable ; cette valeur n'est pas absolue, la détermination de cette valeur absolue dépendant des autres critères ou variables, et de l'intention de l'utilisateur (voir remarque plus bas). Pratiquement, et sauf pour certains calculs statistiques, cette variable vaut un demi-ton.

Imax : soit le plus grand intervalle utilisable pour un calcul déterminé. Dans le calcul statistique, Imax peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre Imin et Sum_init, définie plus bas : pratiquement, et pour les recherches réalistes en systèmes heptatoniques par exemple, Imax peut être fixé à un ton et demi (inclusif).

NI : soit le nombre d'intervalles successifs nécessaires à la formation d'un système. Par exemple, si NI vaut 5, le calcul correspond à une recherche de systèmes pentatoniques, à condition que les deux variables imin et sum_init soient cohérentes.

Sum_init : ou la somme initiale recherchée, à laquelle doit être égale la somme des intervalles de chaque système généré. Pour simplification, si Sum_init est égal à 12, et que Imin vaut 1, il se peut que nous soyons en systèmes en demi-ton, et nous serons en quart de ton si Sum_init = 24 et Imin = 2 (x quart de ton, soit un 1/2 ton), cela pour les calculs courants. Les variables suivantes permettront de mieux préciser le type de calcul effectué.

Sum_quinte : valeur en multiples de plus petit intervalle possible de la quinte « juste » du système ; ce critère aide à définir le type de calcul, ou permet des sous-études sur les systèmes.

Sum_quarte : comme pour Sum_ quinte, mais pour la quarte « juste ».

Remarque : les données Imin, Imax, NI et Sum_init ont une valeur contraignante (les systèmes sont générés au sein des bornes et correspondent aux conditions initiales données), tandis que les critères Sum_quinte et Sum_quarte ont une valeur descriptive et indicative (ils servent à « marquer » les systèmes déjà générés, tout en donnant des indications sur le type de calcul effectué).

Discussion sur les variables

Pour mieux comprendre la nature des variables du calcul, prenons deux exemples courants, qui sont les systèmes de la musique occidentale tonale diatonique avec des intervalles en multiples de demi-ton (ou toute autre musique dont le PGCD[294] est le demi-ton), et l'exemple de la musique arabe, dont les intervalles peuvent être ramenés à des multiples du quart de ton.

Dans le cas d'un calcul en demi-ton, par exemple, Imin vaut un demi-ton (soit 1 x 1/2 ton), Imax vaut un ton entier[295] (soit 2 x 1/2 ton), NI vaut 7 (pour les systèmes heptatoniques), Sum_init est l'équivalent de 12 (demi-tons à l'octave), la quinte a une valeur de 7 (demi-tons), et la quarte une valeur de 5 demi-tons.

D'ou, pour une recherche en systèmes à intervalles multiples du demi-ton, les données

Imin = 1
Imax = 2
NI = 7
Sum_init = 12
Sum_quarte = 7
Sum_quinte = 5

suffisent au programme pour générer des systèmes de hauteurs heptatoniques et octaviants en demi-ton et ton.

[294] Plus Grand Commun Diviseur.
[295] ce calcul ne prend pas en compte, par exemple, les modes mineurs avec « sensible ».

Pour effectuer (par exemple) une recherche sur les systèmes bi-octaviants (en 2 x 7 intervalles) en demi-ton et un ton, il suffit ici de modifier les valeurs sum_init (qui vaudra 24 demi-tons) et NI (équivalant ici à 14 intervalles pour une double octave) : les autres valeurs ne changent pas, ce qui donnerait comme variables à rentrer dans le programme

Imin = 1
Imax = 2
NI = 14
Sum_init = 24
Sum_quarte = 7
Sum_quinte = 5

Pour passer en quart de ton (sur une octave), par contre, avec un intervalle minimum de un demi-ton (soit 2 x 1/4 de ton) et un intervalle maximum de un ton et demi (soit 6 x 1/4 de ton), les valeurs à rentrer sont les suivantes

Imin = 2
Imax = 6
NI = 7
Sum_init = 24
Sum_quinte = 14
Sum_quarte = 10

Pour un calcul en quart de ton, avec un intervalle minimum de un demi-ton (soit 2 x 1/4 de ton) et un intervalle maximum de un ton et demi (soit 6 x 1/4 de ton), mais pour des systèmes « go » [296] (dont la somme des NI intervalles est supérieure à l'octave), un exemple de valeurs à rentrer serait

Imin = 2
Imax = 6
NI = 7
Sum_init = 26
Sum_quinte = 14
Sum_quarte = 10

Dans ce dernier exemple, les systèmes générés par le calcul seront des systèmes « go » composés de sept intervalles successifs multiples du 1/4 de ton entre les bornes Imin et Imax, et dont la somme des intervalles vaut 6,5 tons. Ici, ce sont les critères Sum_quinte et Sum_quarte qui nous confirment que nous sommes bien dans ce cas de figure, puisqu'il faut multiplier le plus petit intervalle possible (1/4 de ton) par 14 (valeur de Sum_quinte) pour obtenir une quinte « juste », soit 3,5 tons. C'est en fait l'ensemble des données initiales (valeurs données initialement, soit Imin, Imax etc.) qui permet de définir le type de systèmes généré par le programme.

Le programme permet par ailleurs d'effectuer des calculs pour n'importe quel intervalle minimum tel que Imin soit égal à

1/(2 x n) (IV)

n étant ici un nombre entier positif quelconque (les seules limites sont le temps calcul et la mémoire) : ceci s'explique par le fait que le demi-ton n'est modélisable (reproductible à l'aide d'une procédure mathématique ou informatique) dans notre cas que si le plus petit intervalle a une valeur telle que le numérateur soit ramenable à la valeur un, et le dénominateur soit égal à un produit de deux par un entier quelconque positif n (donc un nombre pair) ; en effet, et si le dénominateur est un nombre impair, nous ne pouvons pas obtenir de demi-ton « exact » (ou de quinte ou quarte « justes » puisque la première vaut 3 tons et 1/2, et la deuxième 2 tons et 1/2). Ceci est plus facile à comprendre sur les exemples de modélisation en tiers ton, 1/6 de ton et 1/5 de ton suivants :

[296] Autrement dit des systèmes « plus grands que l'octave » : voir lexique.

Si nous considérons que le plus petit intervalle est égal au 1/3 de ton, et vu que le programme fonctionne par incrémentation des intervalles de la valeur de ce plus petit intervalle, les valeurs que peut prendre un intervalle quelconque seraient 1/3, 2/3, 3/3, 1 ton et 1/3 etc. Le demi-ton se situe entre le 1/3 de ton et les 2/3 de ton, et ne sera jamais atteint exactement (ou avec une définition suffisante, de l'ordre du comma) : par contre, l'utilisation du sixième de ton (1/6, donc avec un dénominateur pair) donnera la suite 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6 etc. Le demi-ton équivaut ici aux 3/6 de ton, et est modélisable en 1/6 de ton (la quarte vaut dans ce cas de figure 15 x 1/6 de ton, la quinte 21 x 1/6 de ton). Dans le cas du 1/5 de ton, par contre, la suite d'intervalles modélisables est 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5 etc. : le demi-ton se situe quelque part entre le 2/5 ton et le 3/5 ton, mais ne sera pas « exact » : qui plus est, cette approximation est de l'ordre de 34% (soit (1/2 - 1/3)/(1/2)x100), ce qui dépasse largement les bornes d'une discrétisation telle qu'envisagée dans cette méthode.

Pour compliquer les choses, je fait remarquer ici que dans l'optique « généraliste » exposée, le critère sum_init est un critère très ambigu : en effet, choisir une somme initiale de 24 (24 quoi ?) et un intervalle minimum de 2 signifie que nous sommes en base 1/4 de ton, puisque 24 * 1/4 == 6 tons (à condition que nous soyons dans un système octaviant). Par contre, choisir une somme initiale de 24 avec un intervalle minimal == 1 peut vouloir dire deux choses : a) soit nous sommes en 1/4 de ton et l'intervalle minimum permis est égal à un 1/4 de ton, soit, b) nous sommes en demi-ton, l'intervalle minimum étant égal à un demi-ton, mais en calcul supplétif de base douze (soit bi-octaviant). Le plus intéressant est que les résultats, à part pour les sous-systèmes quintoyants ou quartoyants, ne changent pas, puisque ce sont des chiffres : seul le critère de quinte (ou de quarte) permet de différencier les deux calculs ; ce critère est pour le moment intégré au programme, mais devrait pouvoir être défini par l'utilisateur dans une version future. Par extension, le calcul en commas, avec sum_init == 53 (soit 5*9 commas + 2*4 commas) et imin = 4 (commas), ou en 1/8 de ton (sum_init = 48 et imin = 4 également, mais huitièmes de ton) est tout à fait possible dans la version actuelle (toujours aux critères de quarte et de quinte près), mais limité par les possibilités matérielles (plateforme P.C.) et par la programmation (optimisations).

En résumé, et dans l'état actuel de la programmation, nous pouvons modéliser en pratique des intervalles multiples de 1/2 ton, de 1/4 de ton, de 1/6 de ton, de 1/8 de ton etc., des systèmes octaviants ou non, ainsi que filtrer ces systèmes au travers des filtres à vocation musicale décrits plus bas. La version actuelle permet de générer automatiquement ces systèmes (ainsi que les sous-systèmes en découlant, « marqués » pour les quintes et les quartes « justes ») pour un nombre d'intervalles successifs variable entre deux bornes (N1 et N2), ce qui veut dire que les systèmes sont générés pour des valeurs NI égales à toutes les valeurs entre (et y compris) les bornes N1 et N2 données par l'utilisateur.

La pertinence de l'approximation en 1/4 de ton ayant été démontrée par ailleurs, nous pouvons à ce stade aborder les concepts de base (systèmes, sous-systèmes et hyper-systèmes) ainsi que la structuration séquentielle du programme, le calcul pratique et l'interprétation des résultats.

Les concepts de système, sous-système et hyper-système

Le concept de système est loin d'être nouveau en soi : un système de hauteurs correspond, dans ce qui va suivre, à un suite (combinaison) d'intervalles consécutifs caractéristiques (d'un calcul, d'un système de hauteur correspondant à une certaine musique, etc.).

En notation RS « par quarts », le système correspondant au mode majeur occidental se note 4 4 2 4 4 4 2, et se note 2 2 1 2 2 2 1 en notation par demi-ton. À partir de là, il est facile de déterminer les sous-systèmes (combinaisons générés par décalage de la tonique d'un système de référence) correspondant à ce système, en procédant par décalage de la tonique, ou de la première note (ou du premier intervalle, dans notre cas précis) : ce processus génère, dans le cas d'un système heptatonique comme le système du mode majeur, sept sous-systèmes, le premier étant le système majeur lui-même (sous-système n°1, ionien, correspondant au mode de DO), les autres sous-systèmes correspondant aux modes dorien, phrygien, lydien, mixolydien, éolien et locrien (voir figure plus bas) de la musique occidentale (classement Jazz, sinon modes de RÉ, MI, FA, etc.) ; le huitième sous-système correspond ici au mode majeur à l'octave supérieure, à partir duquel le processus reprend de la même manière.

Figure n° 8. **Processus de décalage de la tonique du mode majeur**

Ionien-DO (4424442)

Éolien- LA(4244244)

Lydien- FA (4442442)

Dorien-RÉ (4244424)

4 4 2 4 4 4 2 4 4 2 4 4 4 2 (g)

Ionien-DO(4424442)

Phrygien-MI(2444244)

Mixolydien-SOL(4424424)

Locrien- SI (2442444)

Dans le cas du mode Râst de la musique arabe, le système de référence peut se ramener à la combinaison (en quarts de ton) 4 3 3 4 4 3 3, composée de deux genres râst (4 3 3) séparés par un intervalle disjonctif de valeur (4), soit un ton. Pour ce maqâm, les sous-systèmes identifiables sont successivement le Râst (premier sous-système et système de référence), le Ĥusaynî, le Sîkâ, le Najd, le Yîkâ, le `Ushayrân et le `Irâq, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous. Dans cette suite d'octaves modales, chaque mode se voit doté d'un numéro d'ordre (1 à 7 dans ce cas précis) permettant de le situer rapidement par rapport au mode de référence (ici le Râst). Le Najd, par exemple, est représenté par le système (4, 4 4 3 3 4 3 3), ce qui veut dire que c'est le 4^{e} sous-système du système Râst de référence, avec la combinaison intervallique (pour le sous-système Najd) 4 4 3 3 4 3 3 : remarquons aussi que, au sein de ces combinaisons intervalliques, 1) le sous-système Râst, considéré par les contemporains comme sous-système paradigme de la musique arabe, est un système en double quarte ET quinte (4 + 3 + 3 = 10, + 4 = 14), de même pour le sous-système Ĥusaynî et le sous-système Yîkâ, 2) que les sous-systèmes `Ushayrân (ou Ĥusaynî-`Ushayrân) et `Irâq ont seulement une quarte juste, 3) que le sous-système Najd a seulement une quinte juste, 4) et que le sous-système Sîkâ n'a ni quarte, ni quinte justes ; il est notable que ces échelles modales font partie des échelles reconnues de la musique arabe, à défaut d'être toutes pratiquées régulièrement.

Figure n° 9. **Processus de décalage de la tonique du mode Râst**

Râst (1,4334433)

`Ushayrân (6,3344334)

Najd (4,4433433)

Ĥusaynî (2,3344334)

4 3 3 4 4 3 3 4 3 3 4 4 3 3 (h)

Râst (1,4334433)

Sîkâ (3,3443343)

Yîkâ (5,4334334)

`Irâq (7,3433443)

Par delà la pertinence du classement de ces maqâmât (modes formulaires de la musique arabe) par leur échelle principale, cette méthode permet de ranger toutes les échelles modales (octaviantes) de la musique arabe sous une cinquantaine de systèmes intervalliques, auxquels je peux d'ores et déjà, pour information, rajouter une dizaine de systèmes intervalliques utilisés en musique occidentale, et qui ne semblent pas être utilisés en musique arabe[297] .

Ces maqâmât, sauf exception comme pour le cas du Râst, ne forment pour le moment pas système dans l'acception du terme qu'utilisent François Picard[298] et Fabrice Contri[299] pour leurs analyses respectives du pentatonisme et du Raga indien : ce sont, à ce stade et en reprenant les termes du premier, « une collection non ordonnée » au sein d'un ensemble culturel musical, en l'occurrence la musique arabe.

Reste donc à « ordonner » la totalité des systèmes et sous-systèmes pouvant exister, à les « classer » et les « ranger » : la pratique du calcul de génération de combinaisons intervalliques m'a porté à créer le concept d' « hyper-système », qui s'est avéré un concept puissant et assez révélateur, surtout en ce qui concerne la capacité de rangement et les calculs statistiques. En fait, le nombre de systèmes intervalliques possibles, selon le modèle des subdivisions en quart de ton, est assez conséquent (de l'ordre de 300 à 700 systèmes, selon les critères à valeur musicale qui peuvent être appliqués, et comme nous le verrons plus loin) : c'est ce qui m'a amené à regrouper les systèmes intervalliques au sein d'« hyper-systèmes », qui n'ont pour le moment aucune signification musicale, mais qui sont pratiques du point de vue « rangement » dans l'optique d'une généralisation du classement proposé à toute les combinaison intervalliques possibles en multiples de quart de ton.

Dans ce cas-là, un sous-système intervallique du type « Nahawand », par exemple (soit 4244244) serait rangé sous un même hyper-système avec le sous-système intervallique « Basandîdâ » (4442424), pour cause de correspondance du nombre d'intervalles de même valeur au sein des deux sous-systèmes intervalliques : en effet, les deux sous-systèmes comportent deux intervalles de deux quarts de ton, et 5 intervalles de quatre quarts de ton chacun (20500 en RC), bien que les combinaisons de ces intervalles soient différentes pour chaque sous-système.

Remarque : les hyper-systèmes correspondent en fait à un indicateur de contenance de la série de systèmes et de sous-systèmes correspondant ; le concept d'hyper-système correspond donc à celui de représentation RC (par contenu), mais l'indicateur de contenance est formulé de manière cohérente avec les systèmes et sous-systèmes.

Reste à classer ces systèmes et tous ceux possibles de par la modélisation en quart de ton au sein de leurs hyper-systèmes respectifs ; la méthode choisie est une représentation par valeur minimisée, et généralisée : si nous prenons par exemple l'ensemble des systèmes en multiples de quart de ton, avec un intervalle minimum (Imin) d'un demi-ton (2 x 1/4 de ton), un intervalle maximum de un ton (Imax = 4 x 1/4 de ton), une somme (Sum_init) de sept intervalles consécutifs (NI) égale à 24 (24 x 1/4 de ton == systèmes octaviants), la liste de systèmes générés est la suivante (extrait commenté du fichier résultats du calcul correspondant) :

---

hyper n° 1 ; val. : 2 2 4 4 4 4 4 – 2 0 5
Systèmes :
2 2 4 4 4 4 4 *(non-utilisé en musique arabe[300] == 2 4 4 4 4 4 2 et d'autres)*
2 4 2 4 4 4 4 *(Basandîdâ et autres)*
2 4 4 2 4 4 4 *(système du mode majeur – décalage locrien, mais aussi système de référence du Nahawand, du Shah-Wâr, du Rahâwî, du Kurd etc.)*

hyper n° 2 ; val. : 2 3 3 4 4 4 4 – 1 2 4
Systèmes :
2 3 3 4 4 4 4 (marginal)
2 3 4 3 4 4 4
2 3 4 4 3 4 4 (marginal)
2 3 4 4 4 3 4
2 3 4 4 4 4 3
2 4 3 3 4 4 4 *(référence de Nishâbûr, Mâhûr, Farahnâk, etc.)*
2 4 3 4 3 4 4
2 4 3 4 4 3 4
2 4 3 4 4 4 3
2 4 4 3 3 4 4 *(Sûz-Dîl-Ârâ, Bayât, etc.)*
2 4 4 3 4 3 4 *(référence de `Ardâwî == 4 3 4 3 4 2 4 et Musta`âr == 4 3 4 2 4 4 3)*

297 Par exemple les combinaisons 4262226 (Karnatique n° 43 – J. Charpentier), 4444422 (Unitonique sensible, idem) et quelques autres combinaisons (qui correspondent à des échelles utilisées en musique occidentale) qui ne se retrouvent pas en musique arabe, du moins dans l'état actuel de mes recherches. Pour tous ces exemples, le lecteur pourra se reporter aux tableaux de maqâmât et de modes en Annexe : ces exemples sont cités à titre de comparaison, et ne sont pas exhaustifs.
298 Picard, François : « Modalité et pentatonisme dans les musiques ethniques : deux univers à ne pas confondre », *A.M.* n° 39, mai 2001, p. 37-46.
299 Contri, Fabrice : « Les métamorphoses du Raga, ou les pièges d'une schématisation à la manière occidentale », *A.M.* n° 39, p. 47 à 56, mai 2001, p. 47-56.
300 Mais semble enseigné en Jazz (B & S).

2 4 4 3 4 4 3
2 4 4 4 3 3 4 *(référence de Iṣfahân et Shawq-`Âwûr, etc.)*
2 4 4 4 3 4 3
2 4 4 4 4 3 3 (marginal)

hyper n° 3 ; val. : 3 3 3 3 4 4 4 – 0 4 3
Systèmes :
3 3 3 3 4 4 4 (marginal)
3 3 3 4 3 4 4
3 3 3 4 4 3 4
3 3 4 3 3 4 4 (`Ushayrân, `Irâq, Râst, Ĥusaynî etc.)
3 3 4 3 4 3 4 (utilisé surtout au Maghreb, Râsdu-dh-Dhîl, Ramal-Mâyâ, etc.)

Nous pouvons constater, à ce stade, que le programme classe les systèmes et hyper(-systèmes) par ordre numérique croissant, de sorte que, dans cet exemple précis et par exemple, le système majeur occidental est ici présenté (hyper n°1, système n°3) dans son décalage locrien, soit celui qui minimise la valeur entière du système ramené à une valeur entière (ici, pour les initiés, en base 24 et avec minimum à 2). En effet, les valeurs que peuvent prendre les sous-systèmes du système locrien 2 4 4 2 4 4 4, soit

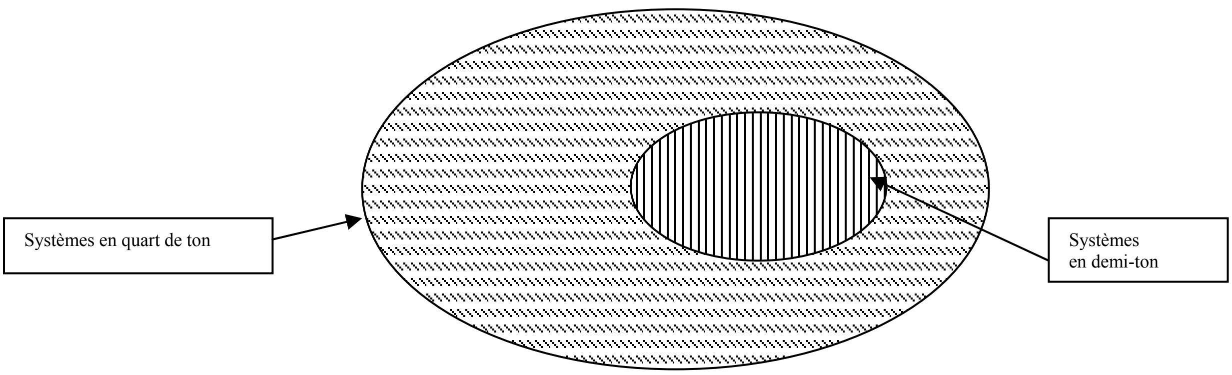
4 4 2 4 4 4 2 (majeur : ionien jazz – mode de DO)
4 2 4 4 4 2 4 (dorien jazz – mode de RÉ)
2 4 4 4 2 4 4 (phrygien ~ – mode de MI)
4 4 4 2 4 4 2 (lydien ~ – mode de FA)
4 4 2 4 4 2 4 (mixolydien ~ – mode de SOL)
4 2 4 4 2 4 4 (éolien ~ – mode de LA)

sont toutes supérieures à la valeur entière de ce système locrien. Le même classement intervient pour les hyper-systèmes, ici aussi rangés du plus petit (en valeur entière absolue) soit l'hyper-système n°1 (2 2 4 4 4 4 4) au plus grand (n°3 == 3 3 3 3 4 4 4).

De même pour les systèmes comportant des 3/4 de ton, certaines combinaisons caractéristiques peuvent être détectées, dont certaines forment système (N°2, 10 : Bayât, etc. et N°3, 4 : `Ushayrân, etc.), et d'autres non.

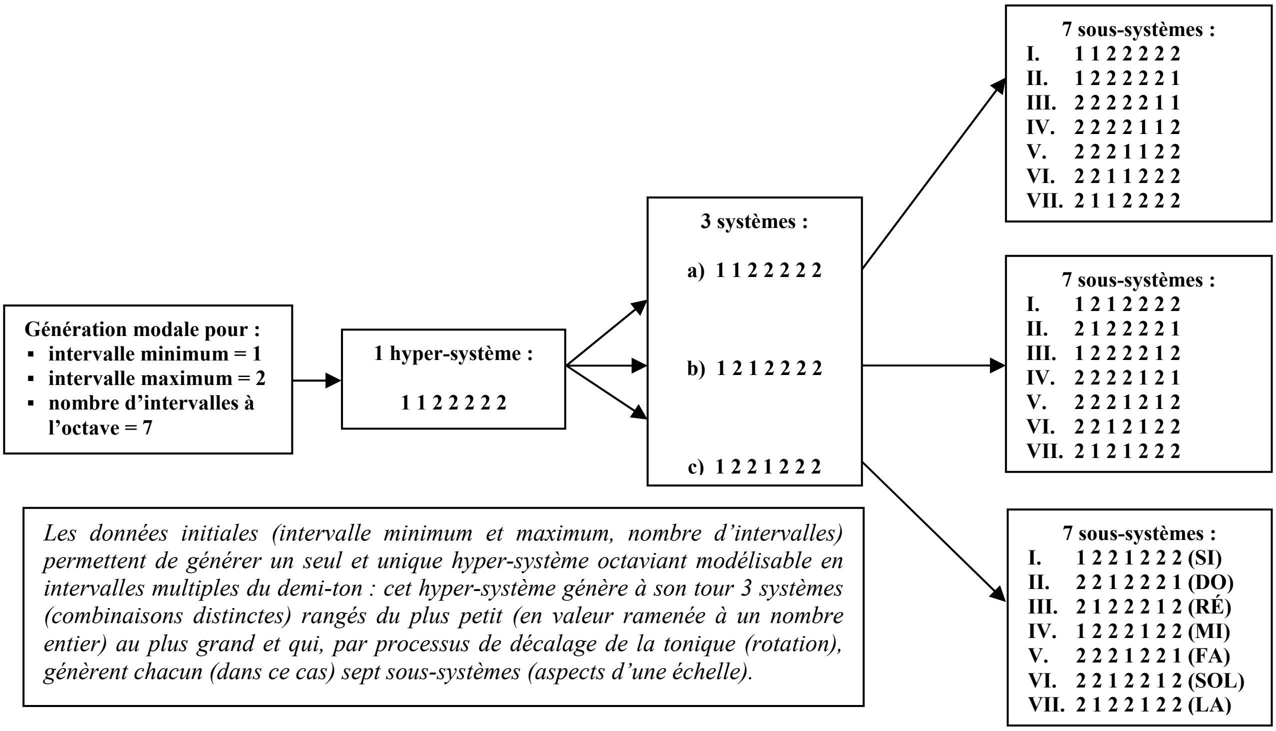
Nous pouvons constater aussi, à travers un calcul d'ambitus réduit (dans ce cas précis), que le programme détecte des systèmes pouvant être ramenés à des multiples de demi-ton, comme dans le cas de l'hyper-système N°1 (qui peut être noté 1 1 2 2 2 2 2 en multiples de 1/2 ton), qui forment ici un sous-ensemble du résultat général en 1/4 de ton : de manière générale, et comme nous allons le voir plus en détail par la suite, les systèmes en demi-ton constituent un sous-ensemble des systèmes en 1/4 de ton, c.à.d. que tous les systèmes générables en calcul par demi-ton peuvent être ramenés à des systèmes exprimés en multiples de 1/4 de ton (exemple du système majeur ci-haut). Ceci s'explique aisément par le fait qu'un demi-ton vaut deux quarts de ton, et que le demi-ton est modélisable via le quart de ton, même si l'inverse n'est pas vrai ; de même, et dans le cas d'une modélisation en huitième de ton, les systèmes en quart de ton (et à fortiori en demi-ton) constitueront un sous-ensemble des systèmes en 1/8 de ton : cette précision dans la modélisation ne s'avérant à ce stade pas nécessaire pour reproduire, qualitativement et quantitativement, les échelles modales de la musique arabe, je me contente par la suite des modélisations en 1/4 de ton.

Figure n° 10. Représentation schématique des ensembles de systèmes musicaux exprimés en quart de ton et en demi-ton



Le schéma général d'appartenance des systèmes est reproduit ci-dessous (pour le cas particulier traité) : cette figure représente le résultat du processus de génération et non pas une schématisation de ce processus.

Figure n° 11. Exemple d'arborescence des combinaisons intervalliques



Sur cet exemple, l'échelle du mode majeur occidental correspond au 2[e] sous-système généré par décalage de la note de référence du troisième système sur le schéma : certaines causes du choix de ce système en particulier en musique tonale apparaîtront dans l'étude détaillée des modes octaviants en 1/2 ton.

Il est utile par ailleurs de préciser, à ce stade préalable, que le critère d'intervalle maximum (en considérant que l'intervalle minimum est toujours un demi-ton) est un critère inclusif, dans le sens que l'ensemble des systèmes générés avec un intervalle maximum plus grand, toutes variables étant égales par ailleurs, contient l'ensemble des systèmes générés avec un intervalle maxi plus petit : pour illustrer cette règle, prenons l'exemple de la modélisation en quart de ton, effectuée plus haut, avec

Imin = 2 (plus petit intervalle égal au demi-ton, l'unité de comptage étant confirmée plus bas)
Imax = 4 (plus grand intervalle égal au ton)
NI = 7 (sept intervalles consécutifs)
Sum_init = 24 (systèmes octaviants)
Sum_quinte = 14 (confirmation du fait que nous sommes en quart de ton)
Sum_quarte = 10 (confirmation de la valeur de la quarte)

Ce calcul génère les trois hyper-systèmes (avec leurs systèmes et les sous-systèmes correspondants, voir plus haut) suivants :

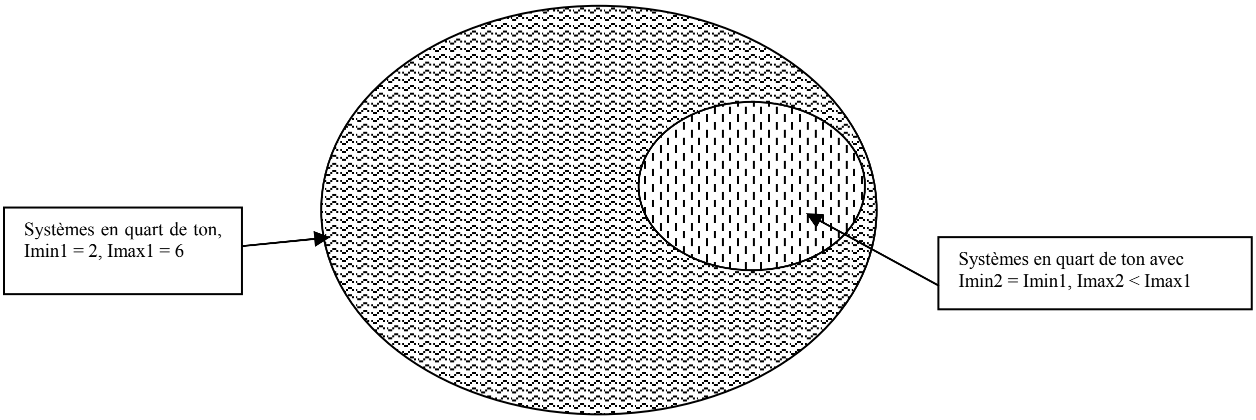
hyper n° 1 ; val. : 2 2 4 4 4 4 4 hyper n° 2 ; val. : 2 3 3 4 4 4 4 hyper n° 3 ; val. : 3 3 3 3 4 4 4	(i)	(Imax = 4)

En changeant la valeur de Imax et en la mettant à 6 (x 1/4 de ton, soit un ton et demi), le programme génère cette fois-ci 19 hyper-systèmes qui sont listés ci-dessous en (j) [extrait du calcul correspondant], avec les nombres de systèmes ainsi que les nombres de sous-systèmes en quinte ou quarte « justes » correspondants (nous reverrons ces derniers critères par la suite). Précisons ici que ces systèmes sont non-redondants, c'est-à-dire que chacun des systèmes est différent de l'autre de par sa structure interne et l'agencement de ses intervalles.

hyper n° 1, valeur : 2 2 2 2 4 6 6 ; Syst. : 15 ; 5tes : 58 ; 4tes : 58
hyper n° 2, valeur : 2 2 2 2 5 5 6 ; Syst. : 15 ; 5tes : 23 ; 4tes : 23
hyper n° 3, valeur : 2 2 2 3 3 6 6 ; Syst. : 30 ; 5tes : 54 ; 4tes : 54
hyper n° 4, valeur : 2 2 2 3 4 5 6 ; Syst. : 120 ; 5tes : 208 ; 4tes : 208
hyper n° 5, valeur : 2 2 2 3 5 5 5 ; Syst. : 20 ; 5tes : 56 ; 4tes : 56
hyper n° 6, valeur : 2 2 2 4 4 4 6 ; Syst. : 20 ; 5tes : 80 ; 4tes : 80
hyper n° 7, valeur : 2 2 2 4 4 5 5 ; Syst. : 30 ; 5tes : 40 ; 4tes : 40
hyper n° 8, valeur : 2 2 3 3 3 5 6 ; Syst. : 60 ; 5tes : 120 ; 4tes : 120
hyper n° 9, valeur : 2 2 3 3 4 4 6 ; Syst. : 90 ; 5tes : 168 ; 4tes : 168
hyper n° 10, valeur : 2 2 3 3 4 5 5 ; Syst. : 90 ; 5tes : 210 ; 4tes : 210 (j)
hyper n° 11, valeur : 2 2 3 4 4 4 5 ; Syst. : 60 ; 5tes : 96 ; 4tes : 96
hyper n° 12, valeur : 2 2 4 4 4 4 4 ; Syst. : 3 ; 5tes : 12 ; 4tes : 12 (N°1 en (i))
hyper n° 13, valeur : 2 3 3 3 3 4 6 ; Syst. : 30 ; 5tes : 46 ; 4tes : 46
hyper n° 14, valeur : 2 3 3 3 3 5 5 ; Syst. : 15 ; 5tes : 29 ; 4tes : 29
hyper n° 15, valeur : 2 3 3 3 4 4 5 ; Syst. : 60 ; 5tes : 120 ; 4tes : 120
hyper n° 16, valeur : 2 3 3 4 4 4 4 ; Syst. : 15 ; 5tes : 30 ; 4tes : 30 (N°2 en (i))
hyper n° 17, valeur : 3 3 3 3 3 3 6 ; Syst. : 1 ; 5tes : 0 ; 4tes : 0
hyper n° 18, valeur : 3 3 3 3 3 4 5 ; Syst. : 6 ; 5tes : 12 ; 4tes : 12
hyper n° 19, valeur : 3 3 3 3 4 4 4 ; Syst. : 5 ; 5tes : 18 ; 4tes : 18 (N°3 en (i))

Il est aisé de se rendre compte que nous retrouvons les trois hyper-systèmes de la série (i) dans (j), en positions (respectivement) 12, 15 et 19. Nous sommes passés de 3 hyper-systèmes et 23 systèmes possibles (soit 7 x 23 = 161 sous-systèmes) à 19 hyper-systèmes comportant 685 systèmes possibles (soit 685 x 7 == 4795 sous-systèmes possibles)[301], et la série (i) constitue bien un sous-ensemble de la série (j), ce qui est illustré par la figure suivante.

Figure n° 12. Représentation schématique des ensembles de systèmes musicaux en fonction des bornes Imin et Imax



Vérifions, tant que nous y sommes, l'appartenance des systèmes en demi-ton à l'ensemble des systèmes en 1/4 de ton : dans la série (j), trois et uniquement trois hyper-systèmes peuvent être ramenés à une modélisation en demi-ton, et qui sont

hyper n° 1, valeur : 2 2 2 2 4 6 6
hyper n° 6, valeur : 2 2 2 4 4 4 6 (k)
hyper n° 12, valeur : 2 2 4 4 4 4 4

Le calcul correspondant en demi-ton nécessite des données initiales adaptées, soit

Imin = 1 (plus petit intervalle égal au demi-ton, l'unité de comptage étant confirmée plus bas)
Imax = 3 (plus grand intervalle égal au ton et demi)

[301] Il est évident que ces sous-systèmes ne portent pas encore en eux d'information musicale explicite, mais ils représentent, en l'état actuel du calcul, l'ensemble absolu de possibilités de création de systèmes intervalliques octaviants (en multiples du quart de ton), constitués de sept intervalles consécutifs plus grands ou égaux au demi-ton et plus petits ou égaux au ton et demi. Le lecteur peut se reporter à la base de données reprenant l'intégralité de ces sous-systèmes, en fin d'Annexes.

NI = 7 (sept intervalles consécutifs)
Sum_init = 12 (systèmes octaviants)
Sum_quinte = 7 (confirmation du fait que nous sommes en demi-ton)
Sum_quarte = 5 (confirmation de la valeur de la quarte)

Dont le résultat est constitué par les hyper-systèmes suivants :

hyper n° 1, valeur : 1 1 1 1 2 3 3 ; Syst. : 15 ; 5tes : 58 ; 4tes : 58
hyper n° 2, valeur : 1 1 1 2 2 2 3 ; Syst. : 20 ; 5tes : 80 ; 4tes : 80 (l)
hyper n° 3, valeur : 1 1 2 2 2 2 2 ; Syst. : 3 ; 5tes : 12 ; 4tes : 12

Ces hyper-systèmes sont l'exact équivalent, en valeurs d'intervalles exprimées en demi-ton, aux trois hyper-systèmes de la série (k), générée en multiples de 1/4 de ton, ce qui nous permet de formuler, à ce stade, deux règles qui vont faciliter l'interprétation ultérieure des résultats, et qui sont que :

1) tout ensemble de systèmes générés par le programme « modes » en approximation d'intervalles par demi-ton est inclus dans l'ensemble correspondant généré par approximation au 1/4 de ton près (qui, à son tour, est inclus dans l'ensemble des sous-systèmes générés en 1/8 ton, etc.), et
2) tout ensemble de systèmes générés par le programme « modes » avec des intervalles compris ou égaux à Imin et Imax, est inclus dans l'ensemble des systèmes générés avec des valeurs de Imin et Imax respectivement plus petite ou égale, ou plus grande ou égale aux bornes du calcul en question [302].

Ces règles étant établies, il nous est nécessaire à ce stade de passer en revue la structuration et les critères de filtrage du programme, pour être à même de mieux comprendre les résultats des générations modales.

<u>Règles de rangement des hyper-systèmes, systèmes et sous-systèmes</u>

La règle générale suivie est celle du rangement par ordre croissant de la valeur des intervalles, en assimilant une suite d'intervalles à un nombre entier : un sous-système du type Râst a les intervalles conjoints 4 3 3 4 4 3 3, mais le système correspondant sera celui qui minimise la valeur de ce nombre, soit le système 3 3 4 3 3 4 4 correspondant au mode Ĥusaynî-`Ushayrân en musique arabe, et correspond à son tour (en rangeant les intervalles du plus petit au plus grand, et de gauche à droite) à l'hyper-système 3 3 3 3 4 4 4, soit l'hyper-système n° 19 dans la série (j), lui aussi rangé par ordre croissant (et dernier de la série) au sein de la base de données correspondante. Reste à définir si cet hyper-système est octaviant ou s'il appartient à la famille des systèmes « lo-go », soit non octaviants : ceci est effectué par l'assignation à la base de données correspondantes d'un chiffre correspondant au nombre de divisions manquantes ou supplétives par rapport à l'octave ; dans le cas des systèmes octaviants, ce chiffre est le zéro puisqu'il n'y a pas d'écart par rapport à l'octave, et notre sous-système devient caractérisé de la manière suivante,

n° d'ordre du système dans l'hyper-système correspondant

décalage par rapport au système de tête

identifiant du type de sous-système (ici octaviant) et de base de données

(0, 19, 4, 3, 4 3 3 4 4 3 3)

n° d'ordre de l'hyper-système dans la base de données correspondante

valeur des intervalles conjoints composant le sous-système

ce qui veut dire que nous sommes dans le cas d'un sous-système heptatonique (nombre d'intervalles) octaviant (le « 0 ») en décalage 3 par rapport au système de tête n°4 de l'hyper-système n° 19 de la base de données (« réaliste », qui

[302] Reste à déterminer l'accroissement possible et les limites de la génération : ces deux points sont abordés plus loin dans le texte.

constitue un sous-ensemble de la base de données globale)[303] correspondante (le « 19 »), et en décalage de deux degrés par rapport à son système de tête (le « 3 »), avec les intervalles conjoints suivants : 4 3 3 4 4 3 3.

Le sous-système majeur sera identifié, au sein de cette même base de données, sous :

(0, 12, 3, 2, 4 4 2 4 4 4 2)

Pour caractériser le système générateur du mode majeur, nous utiliserons la suite suivante : (0,12,3,2442444). L'hyper-système correspondant sera caractérisé comme suit : (0,12,2244444).

Structuration du programme « modes V5 »

Le programme, écrit pour sa majeure partie en langage FORTRAN 90, suit approximativement la séquence suivante :

1- définition des bibliothèques et des variables du calcul
2- initialisation des variables
3- lecture des données (Imin, Imax, etc.)
4- vérification de la cohérence des données
5- initialisation du calcul
    a. détermination de int_max_reel et de n_int_car (voir plus bas)
    b. ouverture des fichiers résultats et des fichiers de travail
6- génération des systèmes pour NI = N1 (borne inférieure)
    a. initialisation du système de départ
    b. génération et comptage des systèmes, vérification du critère Sum_init
    c. élimination des redondances
    d. assignation-identification des sous-systèmes pour la base de données
7- marquage (filtrage) des systèmes à l'aide des critères prédéfinis (voir plus bas) :
    a. marquage des systèmes « chromatiques » et « ultra-chromatiques »
    b. marquage des systèmes avec intervalles maximisés consécutifs
    c. marquage des systèmes satisfaisant à deux ou trois des critères « mini » ou « maxi »
8- regroupement des systèmes au sein d'hyper-systèmes (voir plus bas)
9- repérage (marquage) des sous-systèmes (voir plus bas) avec quinte ou quarte juste
10- comptage statistique des occurrences d'intervalles caractéristiques au sein des systèmes et sous-systèmes (voir plus bas)
11- écriture des résultats et création des bases de données correspondantes au calcul en cours
12- répétition des séquences 6 à 11 pour NI = N1 +1 jusqu'à NI = N2
13- étude statistique et comparative des résultats des calculs avec NI = N1 à N2.
14- affichage graphique des résultats comparatifs.

Dans la liste de séquences d'opération ci-dessus, les séquences soulignées sont celles qui sont d'intérêt pour l'exposé théorique à suivre.

[303] L'inclusion de tous les systèmes possibles mènerait à un encombrement non-justifié des listes de systèmes existants ou potentiels : ce point est développé dans la suite du mémoire.

Rappelons un peu les données de base : les valeurs Imin, Imax, etc. caractéristiques du calcul doivent être fournies par l'utilisateur, sous forme de fichier texte ou par rentrée directe (selon les versions du programme). Un exemple de fichier texte de données correspondant à un calcul en demi-ton tel qu'exposé plus haut serait :

demi_ton\1_2_1_12_12_3
1
2
1
12
12
3

Dans cet exemple, la première ligne (soit « demi_ton\1_2_1_12_12_3 ») correspond au nom du fichier résultats (le programme accole la date et l'heure du calcul, ainsi que l'extension « r.txt » au nom ainsi donné). Le caractère « \ » est automatiquement interprété comme un ordre de passage dans un sous-répertoire (Windows-P.C.) qui, dans ce cas précis, s'appelle « demi_ton », et écrit les résultats dans le fichier (dans le répertoire « demi_ton ») « 1_2_1_12_12_3_jj_mm_ss_aa_heure_r.txt », où <u>jj</u> est le jour courant en chiffres décimaux, <u>mm</u> le mois courant, <u>ss</u> le siècle et <u>aa</u> l'année en cours, <u>heure</u> l'heure (en format hh « : » mm, où <u>mm</u> sont les minutes) et où les caractères « _r.txt » indiquent qu'il s'agit d'un fichier de résultats en format texte.

La deuxième ligne donne la valeur de Imin (1), la troisième celle de Imax (2), la quatrième la valeur de N1 (1), puis N2 (12) en cinquième ligne, Sum_init (12) en sixième et la valeur It_maxc (voir plus loin) en dernière position. Les assignations de Sum_quinte et Sum_quarte se font pour le moment dans le programme lui-même, selon un algorithme simplifié de reconnaissance du type de calcul.

Après la lecture des données ci-dessus et les diverses initialisations informatiques, le programme génère les systèmes selon l'algorithme exposé plus haut, puis vérifie que la somme des intervalles de ces systèmes correspond bien à la valeur Sum_init donnée ; la deuxième grande séquence consiste en l'élimination des systèmes redondants : ce processus est complété par un filtrage préalable des systèmes en fonction de leur appartenance à un hyper-système et ce, par affectation d'une valeur unique caractérisant le contenu brut de chaque système (nombre d'intervalles pour chaque intervalle caractéristique) – cette séquence fait appel à une identification par nombres premiers des intervalles caractéristiques du calcul.

A partir de là, le programme commence à vérifier si les systèmes générés satisfont aux critères intégrés à vocation musicale, et marque le système dans le cas de test positif : à ce stade, il devient utile de passer en détail ces critères, et la manière dont le programme vérifie s'ils sont applicables aux systèmes générés.

- **Le concept de systèmes « redondants » (« R ») et « indépendants » (« NR »)**

Pour compléter cette suite de définitions, il reste ici à développer les concepts de systèmes redondants (« R ») ou non-redondants (« NR ») (ou indépendants), ainsi que les sous-ensembles des systèmes redondants composés par les systèmes à transpositions limitées et ceux que j'appellerai désormais les systèmes « hyper-redondants ».

<u>Systèmes redondants et systèmes non-redondants (indépendants)</u>

Un système, par définition plus haut dans le texte, est une suite d'intervalles qui peut générer NI sous-systèmes par décalage de la tonique. Un système est redondant dès qu'un autre système existe dans l'ensemble des systèmes déjà générés, tel que ses sous-systèmes soient équivalents aux sous-systèmes du premier : nous avons déjà vu des exemples de systèmes redondants dans la série (c), que je reproduis ci-dessous.

Système par échange n°1 : (<u>1/2</u>, 1/2, 1, 1, 1, 1, 1)
Système par échange n°2 : (1/2, <u>1/2</u>, 1, 1, 1, 1, 1) (équivaut au système par échange n° 1)
Système par échange n°3 : (1/2, 1, <u>1/2</u>, 1, 1, 1, 1)
Système par échange n°4 : (1/2, 1, 1, <u>1/2</u>, 1, 1, 1) (c bis)
Système par échange n°5 : (1/2, 1, 1, 1, <u>1/2</u>, 1, 1) (équivaut au système par échange n° 4)
Système par échange n°6 : (1/2, 1, 1, 1, 1, <u>1/2</u>, 1) (équivaut au système par échange n° 3)
Système par échange n°7 : (1/2, 1, 1, 1, 1, 1, <u>1/2</u>) (équivaut au système par échange n° 1)

Dans cette série, les systèmes par échange n°2 et n°7 sont des systèmes redondants du système par échange n°1 : en effet, l'application du processus de décalage fait ressortir les mêmes sous-systèmes pour les systèmes par échange n°1, 2 et 7. Dans modes V5, le programme élimine ces systèmes redondants et garde uniquement le premier[304]. Par extension, un système indépendant est un système pour lequel aucun doublon n'existe au sein de l'ensemble des systèmes générés puis filtrés par le calcul : le programme modes V5 élimine tous les systèmes redondants, et garde uniquement le premier système indépendant généré au sein de plusieurs systèmes équivalents[305].

Systèmes hyper-redondants et systèmes « à transpositions limitées »

Certains systèmes ont des caractéristiques telles que le processus de décalage de la tonique ne poura pas générer de sous-systèmes différents du système de base : tels sont, par exemple, les systèmes constitués à l'aide d'un intervalle unique, répété NI fois. Un système particulièrement intéressant dans ce cas est celui de la gamme par tons, soit (4 4 4 4 4 4) en multiples du quart de ton : le système correspondant à cette gamme ne peut pas générer de sous-systèmes qui soient différents du système de base ; les systèmes à transposition limitées sont un cas connu dans la musique occidentale, comme pour le système à 9 intervalles (2 2 4 2 2 4 2 2 4) qui ne peut générer que deux sous-systèmes différents du système de base (soit trois sous-systèmes différents en tout).

Critères de filtrage des systèmes générés par le programme « modes V5 »

À part le critère de somme et de nombre des intervalles ainsi que ceux de l'intervalle minimum et de l'intervalle maximum expliqués plus haut (critères contraignants), le programme applique plusieurs autres filtres, en s'inspirant de la pratique musicale modale, qu'elle soit occidentale ou orientale. Les filtres concernent, avant tout, les types d'intervalles utilisés et leur disposition (critères indicatifs). Deux filtres très simples sont ceux appliqués pour retrouver des suites de deux ou plus intervalles minimaux, en général le demi-ton.

- **Filtre « MIN »**

Le filtre « MIN » marque tous les systèmes comportant deux intervalles minimaux se suivant : ce filtre a été affiné et comporte deux sous-filtres « uMIN » et « MIN/347 », le premier sous-filtre marquant les systèmes avec trois ou plus intervalles successifs égaux à l'intervalle minimum (nommés désormais « ultra-chromatiques » ou « ultra-MIN »), et le deuxième marquant les systèmes comportant deux intervalles mini se suivant, à l'exclusion des intervalles en passage de quarte ou de quinte, ou à l'octave. Le critère uMIN et ses dérivés sont inclus dans une version (modes V5.2) destinée aux analyses fines : MIN347 est calculé pour les systèmes heptatoniques uniquement.

Détaillons :

Critère MIN : détection des systèmes bi-octaviants (les systèmes bi-octaviants sont générés ici par addition de NI intervalles identiques aux NI intervalles de base) comportant au moins deux intervalles minimum qui se suivent (en général des intervalles de demi-ton). Ce critère est utilisé pour marquer les systèmes a priori étrangers à la pratique de la musique occidentale tonale, et aussi, partiellement, à celle de la musique arabe traditionnelle. Un exemple de système « mini » serait celui du mode « Lydien Mineur »[306] dont la double octave peut être représentée par le système 4 4 4 2 2 4 4 - 4 4 4 2 2 4 4[307], mais aussi le système « Napolitain Majeur » vu plus haut et qui sera aussi marqué « MIN » car il comporte un double intervalle de demi-ton au passage à l'octave (2 4 4 4 4 4 2 – 2 4 4 4 4 4 2).

Critère « ultra-MIN » (ou « uMIN ») : ce critère correspond à un durcissement du critère « MIN », par l'exigence de l'existence de trois demi-tons successifs dans la double octave. Il marque les systèmes « ultra-chromatiques », et permet d'affiner la détection de systèmes compatibles (car c'est de cela qu'il s'agit) avec la pratique de la musique arabe, par exemple, ou d'identifier des systèmes peu compatibles avec une pratique tonale, surtout en systèmes en demi-ton octatoniques ou plus[308].

Critère « \MIN_347 » (ou « non-MIN_347 ») : ce critère, réservé pour le moment aux systèmes heptatoniques uniquement, permet d'affiner les tests par critère « MIN », en excluant des systèmes marqués « MIN » les systèmes avec deux intervalles minis consécutifs au passage de la quarte, de la quinte, ou de l'octave. La raison de l'application de ce critère est historique, et ressort de l'observation du tableau des maqâmâts en Annexes à la présente thèse ; en effet, la

---

304 Modes V5 utilise le deuxième algorithme explicité plus haut dans le texte, mais cet algorithme génère aussi des systèmes redondants qui sont également éliminés par le programme.
305 L'élimination des redondances tient à ce que je n'ai pas, à ce jour, trouvé l'algorithme miracle permettant de générer uniquement des systèmes indépendants : je suis ouvert à toutes les suggestions.
306 Ces échelles (et dénominations) sont tirées du (B & S).
307 La raison du passage à la double octave pour le « filtrage » est due au phénomène de décalage par sous-systèmes, qui peut faire passer deux intervalles mini de part et d'autre des autres intervalles. Dans le cas de cet exemple précis du « Lydien Mineur », le décalage en 3e position nous donne un système qui correspond au « Napolitain Majeur », que seul le passage à la bi-octave nous permet de classer comme système « MIN ».
308 Exemple de système octatonique ultra-chromatique : 2 2 2 4 4 2 4 4 ; tous les exemples sont tirés des calculs détaillés en Annexe.

pratique de la musique arabe permet de constater que si des intervalles consécutifs de la valeur du demi-ton peuvent se suivre dans un sous-système caractéristique d'un maqâm, ces doubles intervalles se trouvent de manière quasi-systématique aux points de passage de quarte à quinte, ou de quinte à tétracorde supérieur, ou encore au passage d'octave.

Remarque : ce critère, souligné par François Picard (professeur d'Ethnomusicologie analytique à l'Université Paris IV - Sorbonne) dans le cours d'une réunion d'évaluation de mes travaux de thèse, paraît correspondre à une nécessité de rétablir les consonances d'octave, de quinte ou de quarte (plus rarement dans ce cas) dans le processus d'origine d'élaboration des maqâmât : ces trois consonances sont considérées comme les principales par Al Fârâbî (surtout l'octave et la quinte - voir Annexe : « Citations choisies de Al Fârâbî et Ibn Sînâ ») et correspondent très majoritairement à la pratique de la musique arabe[309]. Ce critère permet entre autres de repérer des sous-systèmes comme le Ḥiṣâr (3 3 6 2 2 6 2)[310] et le Nawâ-Athar (4 2 6 2 2 6 2), « chromatiques » en position 4, le sous-système Ḥijâz-Kâr (2 6 2 4 2 6 2), « chromatique » à l'octave, ou encore le sous-système Zawq-Ṭarab (2 6 2 2 4 4 4), « chromatique » en position 3 : les systèmes satisfaisant au critère « MIN_347 » (comportant deux intervalles mini consécutifs dans d'autres position de départ – 1er intervalle mini – que 3, 4 ou 7) comportent nécessairement deux intervalles mini consécutifs dont le premier occupe la position 1, 2, 5 ou 6. En reprenant le sous-système correspondant au Zawq-Ṭarab (2 6 2 2 4 4 4), et en lui applicant le processus de décalage de tonique, nous obtenons les 7 sous-systèmes suivants :

1- 2 6 2 2 4 4 4 (marqué « MIN » et « MIN_347 »)
2- 6 2 2 4 4 4 2 (marqué « MIN » et « \MIN_347 »)
3- 2 2 4 4 4 2 6 (marqué « MIN » et « \MIN_347 »)
4- 2 4 4 4 2 6 2 (marqué « MIN » et « MIN_347 ») *(m)*
5- 4 4 4 2 6 2 2 (marqué « MIN » et « \MIN_347 »)
6- 4 4 2 6 2 2 4 (marqué « MIN » et « \MIN_347 »)
7- 4 2 6 2 2 4 4 (marqué « MIN » et « MIN_347 »)

Il est facile de se rendre compte que dans un système heptatonique (l'unique type de systèmes auquel est appliqué ce filtre particulier) chromatique exclusif (n'incluant pas d'ultra-chromatisme), il existera toujours 3 systèmes avec critère « MIN_347 » et 4 sous-systèmes avec critère « NON-MIN_347 » : dans ce cas, les ensembles des sous-systèmes marqués MIN_347 et \MIN_347 sont complémentaires au sein de l'ensemble des systèmes marqués MIN (voir Figure n° 13 ci-dessous), alors que dans le cas général, représenté en Figure n° 14, ces critères particuliers ne sont pas pris en compte. Dans le cas de calculs statistiques en systèmes heptatoniques octaviants, il suffira alors, pour déterminer le nombre de sous-systèmes MIN_347, de multiplier le nombre de sous-systèmes MIN ET \uMIN par 3/7.

Nota : quelle est l'influence du critère uMIN utilisé conjointement avec le critère MIN_347? En effet, des systèmes ultra-chromatiques existent qui satisfont au critère MIN_347, comme par exemple le système 3 3 2 2 2 4 4 : dans ce système, et malgré l'existence de trois intervalles minimum qui se suivent, l'application du critère MIN_347 (2 intervalles mini consécutifs dont le premier est en position 3, 4, ou 7) donne un résultat positif puisque les deux intervalles de début du bi-intervalle 2 2 se trouvent ici en positions 3 et 4 (soit respectivement 3 3 2 2 2 4 4 et 3 3 2 2 2 4 4) ; ces exceptions (un sous-système sur 7 si nous appliquons le processus de décalage) ne portent pas à conséquence, puisque, à ce jour, la pratique de l'ultra-chromatisme n'est pas attestée en musique orientale (ou en musique occidentale tonale). Dans le cas d'un ultra-chromatisme poussé (4 intervalles mini consécutifs et plus), il n'existe simplement pas de sous-système heptatonique satisfaisant au critère MIN_347 (je laisse le lecteur s'en rendre compte lui-même en applicant le processus de décalage au système, par exemple, 2 2 2 2 4 6 6). En effectuant ces vérifications, le lecteur peut aussi garder à l'esprit que les genres tétracordaux (ajnâs) traditionnels de la musique arabe excluent, à la base, deux demi-tons consécutifs, à l'exception du genre awrâq-al-kharîf (avec une multitude d'autres noms : voir tableau des ajnâs en Annexe) cité par Sélim Hélou, et dont la notation serait (5 2 2), et le sipahr d'Erlanger (622) : le premier ne semble cependant pas être utilisé dans la pratique de la musique arabe, et son existence ne semble pas être attestée (sauf chez Allâwîrdî, auteur peu fiable – voir 3e partie) comme jins constitutif d'un maqâm ; il pourrait correspondre, en revanche, à une variation momentanée du jeu instrumental ou de la pratique vocale. Quant au sipahr (622), il pourrait résulter d'une erreur d'évaluation d'Erlanger (qui reconnaît que c'est un genre rare, qu'il a en réalité inventé - p. 91, T. V), due à l'organologie du `ûd (voir genre ḥijâz en troisième partie).

[309] Il est important ici de souligner que si la consonance de quinte est un élément très présent dans la musique arabe, certains maqâmât comme le `Ajam-Muraṣṣa` (3 3 4 2 4 4 4), le Qârjighâr (3 3 4 2 6 2 4) ou le Ṭarz-Nwîn (2 4 4 2 6 2 4) ne comportent pas de quinte juste dans leur échelle principale, mais seulement une quarte (juste) : il est encore plus important de souligner l'existence de maqâmât dont l'échelle principale ne comporte ni quarte, ni quinte justes, comme le Huzâm (3 4 2 6 2 4 3), le Musta`âr (4 3 4 2 4 4 3) et le Faraḥnâk (3 4 4 4 2 4 3) entres autres ; soulignons aussi la pratique de maqâmât non octaviants, dont le plus connu est le Ṣibâ, souvent joué avec un demi-ton « manquant » à l'octave (3 3 2 6 2 4 4).
[310] Rappelons que cette échelle est sujette à caution, comme montré en première partie.

Figure n° 13. **Représentation schématique des ensembles de systèmes musicaux en fonction des critères de type MIN – Systèmes heptatoniques**

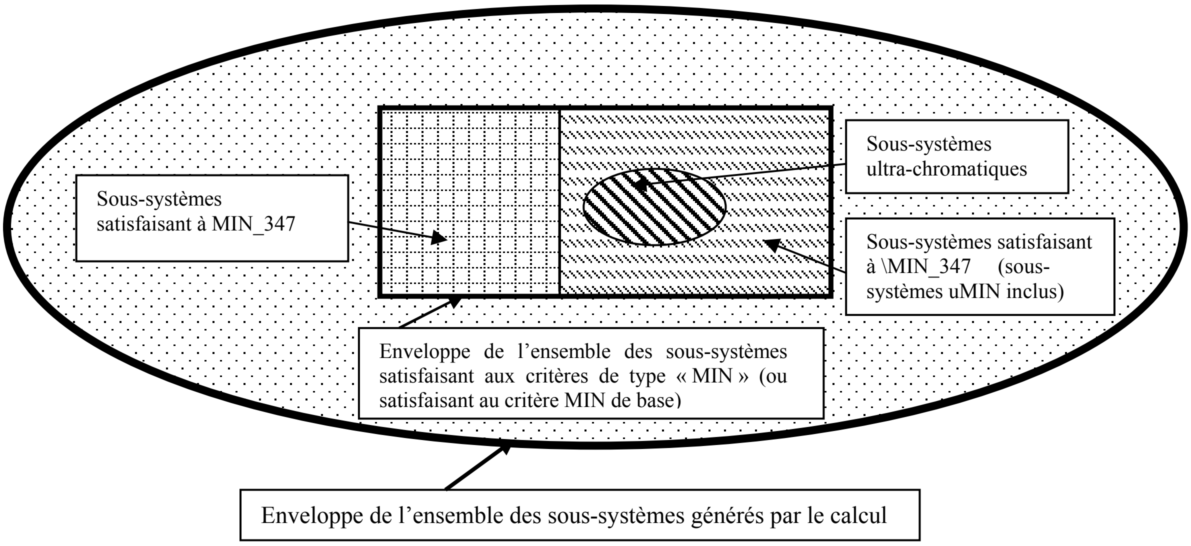
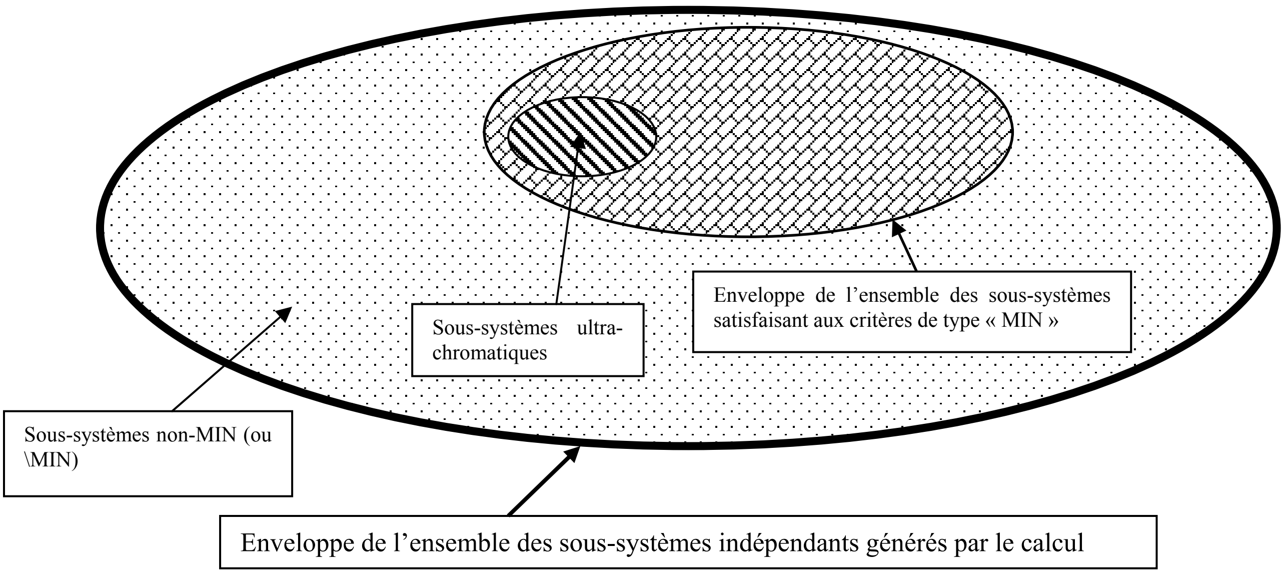


Figure n° 14. **Représentation schématique des ensembles de systèmes musicaux en fonction des critères de type MIN – Systèmes quelconques**



- **Filtre « MAX »**

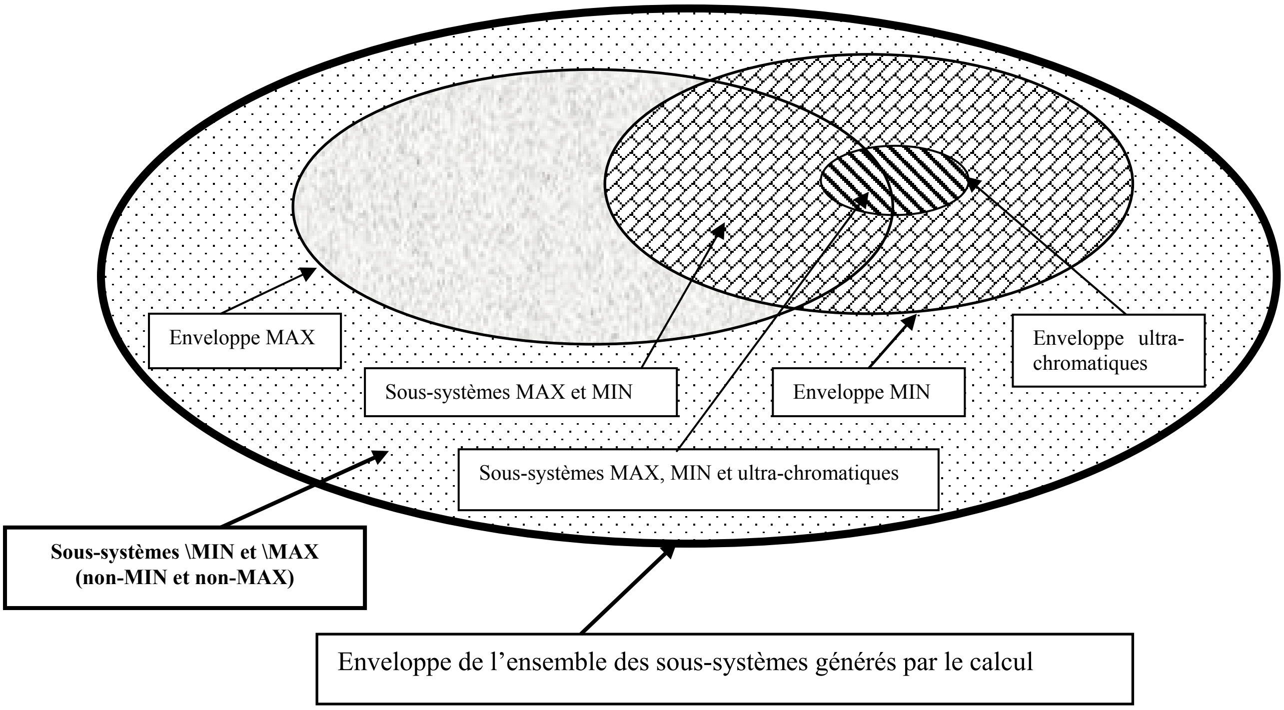
Le filtre (critère) « MAX » devrait en fait être noté « MAX(n) » ou « MAXn » : c'est en effet un filtre qui marque tous les sous-systèmes avec deux intervalles « n » consécutifs, la valeur de « n » étant fixée par l'utilisateur (variable It_maxc décrite plus haut). Ce filtre est très utile, car il permet d'éliminer un grand nombre de systèmes ne correspondant pas à la pratique de la musique arabe : en effet, il n'y a pas de système musical arabe, par exemple et à ma connaissance, qui comporte 2 (ou plus) intervalles successifs de valeur égale ou supérieure à 5/4 de ton[311]. Pour le calcul en demi-ton, It_maxc est fixé généralement à 3/2 ton, de manière à éviter la formation de tritons par agglutination de deux intervalles conjoints.

[311] À l'origine, le critère MAX a été appliqué pour des intervalles successifs de valeur un ton et demi (6/4) : cette valeur semblait correspondre à la double pratique de la musique arabe et de la musique occidentale tonale ; une étude plus poussée des maqâmât a permis d'utiliser, pour le calcul en quart de ton, le critère du 5/4 de ton qui permet d'affiner plus la modélisation, et d'autres critères, déduits de l'étude des échelles modales maqâmiennes par la méthode mise au point dans cette deuxième partie, ou dédiés pour d'autres musiques que la musique arabe, pourront être inclus dans le futur.

Ce critère, couplé aux critères de type « MIN », permet d'approcher encore plus la réalité de la pratique musicale, et réduit considérablement le champ d'investigation dans l'ensemble des systèmes et sous-systèmes générés (voir Figure n° 15 ci-dessous).

Dans la représentation schématique ci-dessous, les différents ensembles sont contenus dans ou s'intersectent les uns les autres, et forment des sous-ensembles caractéristiques : en l'état actuel des choses, disons que nous avons raisonnablement plus de chances de retrouver des systèmes correspondant à la pratique de la musique arabe dans l'ensemble des sous-systèmes \MIN ET \MAX, et que les systèmes (ou sous-systèmes) à écarter, a priori, seraient les systèmes satisfaisant aux trois critères MIN, MAX et ultra-chromatique (uMIN). Les autres sous-ensembles forment des cas intermédiaires, pour lesquels les critères MAX et uMIN semblent, pour le moment, être rédhibitoires : tous les systèmes satisfaisant à ces deux derniers critères peuvent être considérés comme ne correspondant pas à la pratique constatée des musiques orientale (arabe) et occidentale tonale (Imin == 2/4 de ton, It_maxc == 6/4 de ton) ; dans le cas des systèmes marqués MIN par contre, certains des sous-systèmes (statistiquement 3 sur 7 en systèmes heptatoniques octaviants) pourraient correspondre à cette pratique (revoir le critère \MIN_347 plus haut).

Figure n° 15. **Représentation schématique générale des ensembles de systèmes musicaux en fonction des critères de type MIN et MAX**

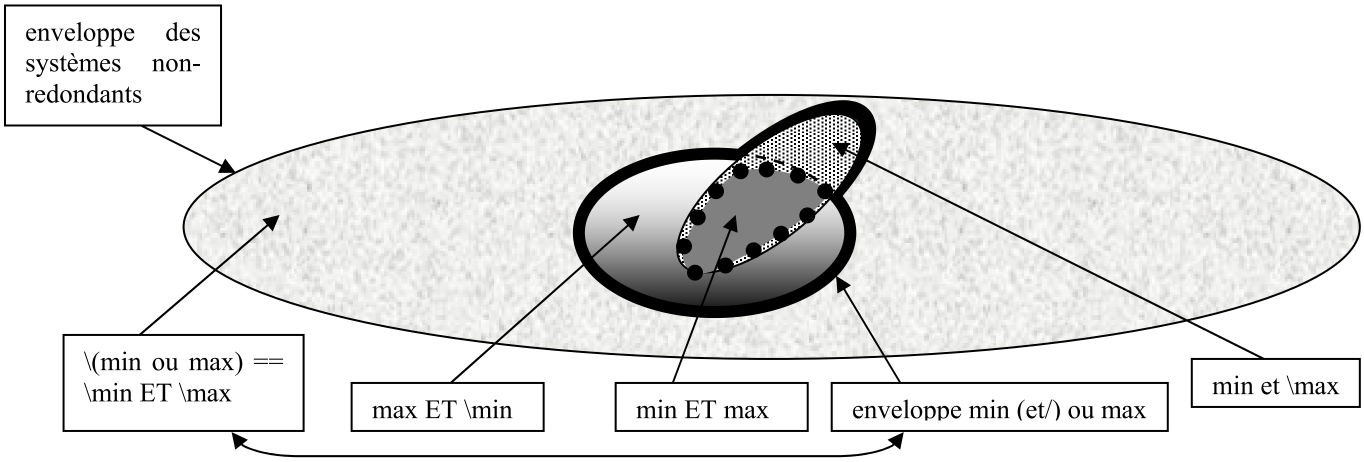


- **Réflexions sur les filtres et leur complémentarité**

i. Le symbole « \ » est utilisé dans ce mémoire pour marquer une négation logique ; ainsi, un système \min (ou système non-min) est un système qui n'appartient pas aux systèmes chromatiques (un système qui ne comporte pas deux intervalles de demi-ton accolés).

ii. Pour des critères croisés, comme par exemple « min ou max », un système marqué par ce critère composé sera un système qui a deux intervalles mini (ici le demi-ton) ET/OU deux intervalles maxi adjacents : un système \(min ou max) est l'équivalent d'un système \min ET \max, soit un système qui ne comporte ni deux demi-tons accolés, ni deux intervalles maxi (it_max, et non pas imax) adjacents ; cette équivalence est illustrée par la figure plus bas.

Figure n° 16. Interaction entre critères positifs et négatifs : conversion de « ET » et de « OU »



Dans cette figure (ci-dessus), l'ensemble des systèmes « min ou max » est entouré d'une « enveloppe » en gras ; l'intersection entre l'ensemble des systèmes « min » et l'ensemble des systèmes « max » (ou systèmes « min ET max ») est entourée par des petits ronds noirs. L'ensemble des systèmes « max » est contenu dans l'ovale central, les systèmes min étant représentés par l'ovale penché et plus petit, et l'ensemble des systèmes non-redondants est contenu dans la totalité du grand ovale : les ensembles « min (et/) ou max » et « \min ET \max » sont complémentaires au sein de l'ensemble des systèmes non-redondants, de même pour les systèmes « min ET max » et les systèmes « \min OU \max » .

- **Filtres « Quinte ou quarte justes » (filtres « Sum_quinte » et « Sum_quarte ») :**

Ces filtres, non contraignants[312], ressortent de plusieurs considérations : la quinte juste a été (depuis l'âge d'or de la civilisation arabe) considérée, du moins dans les écrits qui nous restent et qui sont tous plus ou moins influencés par les théoriciens grecs, comme la consonance de base (après l'octave) ; de même pour les traités théoriques en Occident. Sur le plan pratique de la musique arabe, un certain nombre de maqâmât dérogent à la règle de la formation de la quarte juste par le premier tétracorde, et, dans le cas ou la quarte est « fausse », ces maqâmât ont parfois une quinte juste. Ce phénomène de la quarte juste pourrait être expliqué théoriquement par le fait que la quarte est un renversement de la quinte, en sous-entendant par là que l'octave est bien un repère absolu en musique : la formation probable des maqâmât d'origine, dans l'ambitus d'un tétracorde, et le fait que la majorité des ajnâs (genres tétracordaux de la musique arabe) traditionnels forment bien une quarte juste[313], peuvent expliquer que des théoriciens orientaux, et plus particulièrement Sélim Hélou[314], insistent sur le rôle de la quarte comme consonance de base en musique arabe (et souvent en opposition à la quinte). Cette insistance découle vraisemblalement du rôle joué par le \`ûd dans la formation de genres tétracordaux en musique arabe, et de l'influence déterminante de cet instrument, accordé depuis des siècles en quartes, sur la théorie musicale arabe[315].

Remarque : toujours est-il que certains maqâmât, comme le Huzâm, le Musta\`âr et le Faraĥnâk (voir note n° 309) ne comportent ni quarte, ni quinte justes à partir de leur tonique : dans le cas particulier du Huzâm (3 4 2 6 2 4 3 - voir tableau synoptique en 3^{e} partie), nous pouvons constater qu'aucune des représentations ne fait ressortir de quinte ou de quarte à partir du $MI^{\text{demi-bémol}}$ (SÎKÂ), note tonique (ou finale) du maqâm, à part chez Sâliĥ chez qui le maqâm Huzâm est généré par décalage du maqâm Suznâk (sur DO). Nous pouvons constater aussi, par exemple, qu'Erlanger, malgré sa règle des tierces et des quartes citée plus haut, ne fait nullement mention, dans ses explications sur ce maqâm[316], de l'utilisation d'un jins râst sur DO qui conforterait la thèse de la « quinte à tout prix », sauf en <u>descente</u> (auquel cas nous sommes dans l'échelle du maqâm Mâyâ, E111) : il est vrai que l'exemple que reproduit Erlanger (p. 309) fait apparaître en première ligne de portée un genre râst (4 4 3) en DO, en <u>descente</u> (tricorde) puis, en pivotant sur le DO, en remontée (voir document plus bas) : l'exemple déjà commenté du maqâm Huzâm par Hélou (en première partie) fait néanmoins ressortir un genre râst sur DO, tout comme l'extrait de muwashshaĥ qui le suit montre bien l'utilisation d'un tricorde râst (43 ou DO, RE, MI^{db}), mais un autre exemple (document suivant) pris chez le même auteur, et reproduit ci-dessous dans son intégralité, semble démontrer que le genre râst n'est pas nécessairement une constante pour ce mode. Dans cet exemple (Hélou –

[312] Ils « marquent » seulement les sous-systèmes qui satisfont au critère, et ne les éliminent pas de la liste générale.
[313] Avec des exceptions notables comme le mazmûm (2 4 2) et le kawasht (2 4 3), ainsi que quelques autres que le lecteur peut voir en Annexes.
[314] Voir les définitions d'Erlanger en 1^{e} partie.
[315] c.f. « °Ûd » in [Chabrier, Jean-Claude : « Abbasside » ; « Arabe (musique) », « Arabo-andalou », « Dastgâh », « Iran », « Irak », « Islam », « Liban », « Maqam », « Taqsîm », « °Ûd », *in* M. VIGNAL, *Larousse de la musique,* Paris, Larousse, 2 vol., 1982].
[316] E109, p. 308-309.

interprété ici par Saad Saab sur la plage n° 8, avec un taqsîm d'introduction en plage n° 7), nous pouvons remarquer que les notes utilisées pour cet air (présenté comme traditionnel) sont comprises entre le MI et le RÉ, sans atteindre l'octave. Plus importante ici est l'existence de formules de conclusion de la phrase musicale (entourées d'un ovale sur l'exemple) dont la formule finale, et qui semblent démontrer l'utilisation d'un genre tétracordal huzâm (342) sur tonique en SÎKÂ : comme conclusion pour ce critère, je dirais que la question de la quarte et/ou de la quinte justes comme critères indispensables pour des échelles conformes à la tradition n'est pas encore tranchée. Par ailleurs, le fait que ce soient les théoriciens occidentaux qui insistent sur le critère de quinte juste semble montrer pour ces derniers un attachement à (et une connection avec) la théorie de la formation de l'échelle musicale par cycle des quintes (et son extension harmonique, phénomène limité exclusivement à la musique tonale) : cette théorie ne semble pas applicable en l'état, malgré les efforts louables de ces théoriciens, à la musique arabe ou aux musiques du maqâm en général[317]. Ce critère a été néanmoins maintenu pour les comparaisons entre musiques à esthétiques « quintoyantes » et les autres.

- ***Document n° 81. : Taqsîm (extrait) en maqâm Huzâm (Erlanger)[318]***

- ***Document n° 82. : Muwashshaĥ en maqâm Huzâm (Hélou)[319]***

[317] Rappelons que la formation de l'échelle par cycle des quintes est une théorie, non-prouvée comme beaucoup d'autres théories héritées des Grecs anciens ou autres.
[318] ibid., p. 309.
[319] Hélou, Sélim : « *Al Muwashshaĥât Al Andalûsiya* », Dâr Al Ĥayât, Beyrouth, (s.d.), p. 176.

Définitions complémentaires

Après notre digression sur les critères de quinte et de quarte « justes », il nous reste quelques concepts de base à définir, pour mieux comprendre et interpréter les résultats qui vont suivre :

- **L'intervalle maximum réel (Int_max_reel) :**

C'est l'intervalle maximum effectivement pris en compte dans le calcul, et dont la valeur est déterminée en interne dans le programme, après lecture de la valeur donnée par l'utilisateur. Le concept d'intervalle maximum réel (ou int_max_reel) a été rendu indispensable par les calculs statistiques, sur des intervalles très grands et pour des nombres d'intervalles à l'octave (ou par système) variables ; ceci est plus facile à expliquer sur un exemple précis, par exemple celui des systèmes heptatoniques en multiples de demi-ton : dans ce dernier cas, le premier système que nous pouvons générer, même en fixant Imax (la valeur de l'intervalle maximum utilisable) à 12 (x ½ ton), est le système

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 6) (n)

soit un demi-ton répété six fois, plus un triton. L'ensemble des systèmes générables dans ce cas de figure est constitutif des hyper-systèmes

hyper n° 1, valeur : 1 1 1 1 1 1 6 ; Syst. : 1 ; 5tes : 2 ; 4tes : 2
hyper n° 2, valeur : 1 1 1 1 1 2 5 ; Syst. : 6 ; 5tes : 20 ; 4tes : 20
hyper n° 3, valeur : 1 1 1 1 1 3 4 ; Syst. : 6 ; 5tes : 24 ; 4tes : 24
hyper n° 4, valeur : 1 1 1 1 2 2 4 ; Syst. : 15 ; 5tes : 56 ; 4tes : 56 (o)
hyper n° 5, valeur : 1 1 1 1 2 3 3 ; Syst. : 15 ; 5tes : 58 ; 4tes : 58
hyper n° 6, valeur : 1 1 1 2 2 2 3 ; Syst. : 20 ; 5tes : 80 ; 4tes : 80
hyper n° 7, valeur : 1 1 2 2 2 2 2 ; Syst. : 3 ; 5tes : 12 ; 4tes : 12

générés par un calcul dont les données de départ sont

Imin = 1
Imax = 12
NI = 7
Sum_init = 12 (o')
Sum_quarte = 7
Sum_quinte = 5

Ces hyper-systèmes constituent l'ensemble de tous les hyper-systèmes pouvant être générés pour des combinaisons d'intervalles heptatoniques et octaviantes (avec des intervalles multiples du demi-ton) : même si l'intervalle maximum a été fixé à 12 (x ½ ton), l'intervalle maximum réel utilisable est donc l'intervalle de 6 (x ½ ton), et est reconnu comme tel par le programme [la formule de calcul de l'intervalle maximum reel est : **int_max_reel = sum_init – (ni –1) x imin**, soit dans le cas de l'exemple en cours, int_max_reel = 12 – (7 – 1) x 1 = 6]. Il est facile de se rendre compte, par ailleurs, qu'une valeur d'intervalle supérieure à 6 (x demi-ton) ne peut pas exister dans ce cadre : en effet, et à considérer l'intervalle immédiatement supérieur à Int_max_reel (dans cet exemple) soit le 7 (x demi-ton), et en minimisant les autres intervalles (== Imin == 1/2 ton), nous dépasserons toujours la limite Sum_init, égale dans ce cas à 12 x un demi-ton, comme le montre l'exemple (p) ci-dessous

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 7) (p)

dont la somme des intervalles est égale à 13 (x 1/2 ton), supérieure à Sum_init (donc ne rentrant plus dans le cadre de la génération de systèmes octaviants particulière à ce calcul). Ce qui est vrai pour l'intervalle suivant immédiatement Int_max_reel l'est pour les intervalles plus grands encore, c.q.f.d.

Bien sûr, et si l'intervalle maximum est fixé à 4 (x 1/2 ton), l'intervalle maximum réel sera, dans ce cas, égal à Imax, soit 4 ; la règle générale voudra que :

si Int_max_reel > Imax, alors Imax = Imax (Imax demeure inchangé)
si Int_max_reel < Imax, alors Imax = Int_max_reel (Imax prend la valeur de Int_max_reel).

- **Le nombre d’intervalles caractéristiques (N_int_car) – Occurrences d’intervalles**

Le nombre d’intervalles caractéristiques est un concept qui nous sera utile pour l’interprétation des résultats d’études d’occurrences d’intervalles au sein des systèmes générés par « modes V5 ». Le concept est simple, n_int_car étant le nombre d’intervalles différents (qualitativement) pouvant exister au sein d’un système, pour chaque cas particulier de calcul. Dans le cas du calcul avec les données (o’) (voir le paragraphe précédent), et compte tenu de la réduction imposée par le filtre Int_max_reel (qui ramène l’intervalle maxi de la valeur 12 à la valeur 6), les intervalles caractéristiques de ce calcul, soit toutes les valeurs d’intervalles pouvant être retrouvées au sein des systèmes générés, sont les intervalles de 1, 2, 3, 4, 5 et 6 demi-tons. La formulation générale pour N_int_car (ici égal à 6) est

$$N\_int\_car = (Imax – Imin) + 1 \qquad (q)$$

les intervalles caractéristiques étant compris entre les deux bornes (incluses) Imin et Imax, soit

$$a(n) = Imin, Imin +1, Imin +2 \dots Imax, n = 1, N\_int\_car, +1 \qquad (r)$$

où a(n) est l’intervalle caractéristique numéro n, les valeurs de n étant incluses dans l’ensemble des entiers incrémentés unitairement de 1 à n_int_car.

Les calculs statistiques d’occurrences d’intervalles porteront donc, dans chaque calcul, sur l’ensemble des intervalles a(n) définis en (r).

- ***<u>Conclusion</u>***

Cet exposé constitue un préalable, certes indigeste mais utile, à la compréhension de ce qui va suivre : plusieurs concepts sont apparus en cours de programmation et de réflexion sur les critères de filtrage, et correspondent à une recherche multi-facettes partiellement effectuée par tatonnements ou par intuition, et dont les résultats sont exposés dans le chapitre suivant.

- ***Conclusion des études sur les systèmes heptatoniques***

L'utilisation de critères de filtrage des systèmes d'échelles modales nous permet d'identifier les systèmes existants et de mieux comprendre le pourquoi de leur existence et du choix culturel effectué par chaque musicien ou par chaque civilisation. La musique arabe, modélisable en multiples du quart de ton, est une musique dont le potentiel d'utilisation n'est pas encore rempli, rien que pour les systèmes heptatoniques : nous verrons par la suite que les systèmes multiples du demi-ton (avec des exceptions notables) sont utilisés de manière nettement plus optimisée par cette musique (3e partie), et par les musiques européennes (notamment en Jazz).

L'inclusion unique de l'intervalle de 3/4 de ton, intervalle phare de la musique arabe, crée à elle seule un élargissement considérable des possibilités musicales modales. La modélisation ouverte, pour peu musicale qu'elle soit, permet au chercheur de se rendre compte du différentiel conséquent apporté à la musique modale par l'inclusion des intervalles en multiples du quart de ton (en termes d'échelles supplémentaires), même limité au ton et demi par le haut : le rapport est de l'ordre de 20 fois plus de possibilités.

Pour mieux nous rendre compte de ces différences, reportons-nous aux résultats ci-dessous (Tableau n° 29 et Tableau n° 30) de calculs spécifiques effectués pour l'occasion, et les graphiques s'y rapportant (Figure n° 47) :

Tableau n° 29. Générations (systèmes heptatoniques) avec filtres sur 3 intervalles mini (umin à 1/2 ton, imin = 1/2 ton, imax = 1,5 ton, 2,0 tons)

N° de Calcul	Intervalle mini/(tons)	Intervalle maxi/(tons)	test mini	test maxi	1/2 ton		1/4 de ton	
					Sous-systèmes octaviants	Systèmes indépendants	Sous-systèmes octaviants	Systèmes indépendants
1-1	**1 - 2 / (0,5)**	**3 - 6 / (1,5)**	**0**	**0**	**266**	**38**	**4795**	**685**
2-2	**1 – 2 / (0,5)**	**3 – 6 / (1,5)**	**3**	**0**	**175**	**25**	**4361**	**623**
3-3	**1 – 2/ (0,5)**	**3 – 6 / (1,5)**	**2**	**0**	**36**	**6**	**2646**	**378**
4-4	1 - 2 / (0,5)	3 - 6 / (1,5)	0	2	198	33	4690	670
5-5	1 – 2 / (0,5)	3 – 6 / (1,5)	3	2	144	24	4305	**615**
6-6	1 – 2/ (0,5)	3 – 6 / (1,5)	2	2	36	6	2639	**377**
7-7	1 - 2 / (0,5)	4 - 8 / (2,0)	0	0	354	59	7420	1060
8-8	1 – 2 / (0,5)	4 - 8 / (2,0)	3	0	186	31	6230	**890**
9-9	1 – 2/ (0,5)	4 - 8 / (2,0)	2	0	36	6	3290	**470**
10-10	1 - 2 / (0,5)	4 - 8 / (2,0)	0	2	354	59	7420	1060
11-11	1 – 2 / (0,5)	4 - 8 / (2,0)	3	2	186	31	6230	**890**
12-12	1 – 2/ (0,5)	4 - 8 / (2,0)	2	2	36	6	3290	**470**

Tableau n° 30. Générations (systèmes heptatoniques) avec filtres sur 3 intervalles mini (complément de courbes)

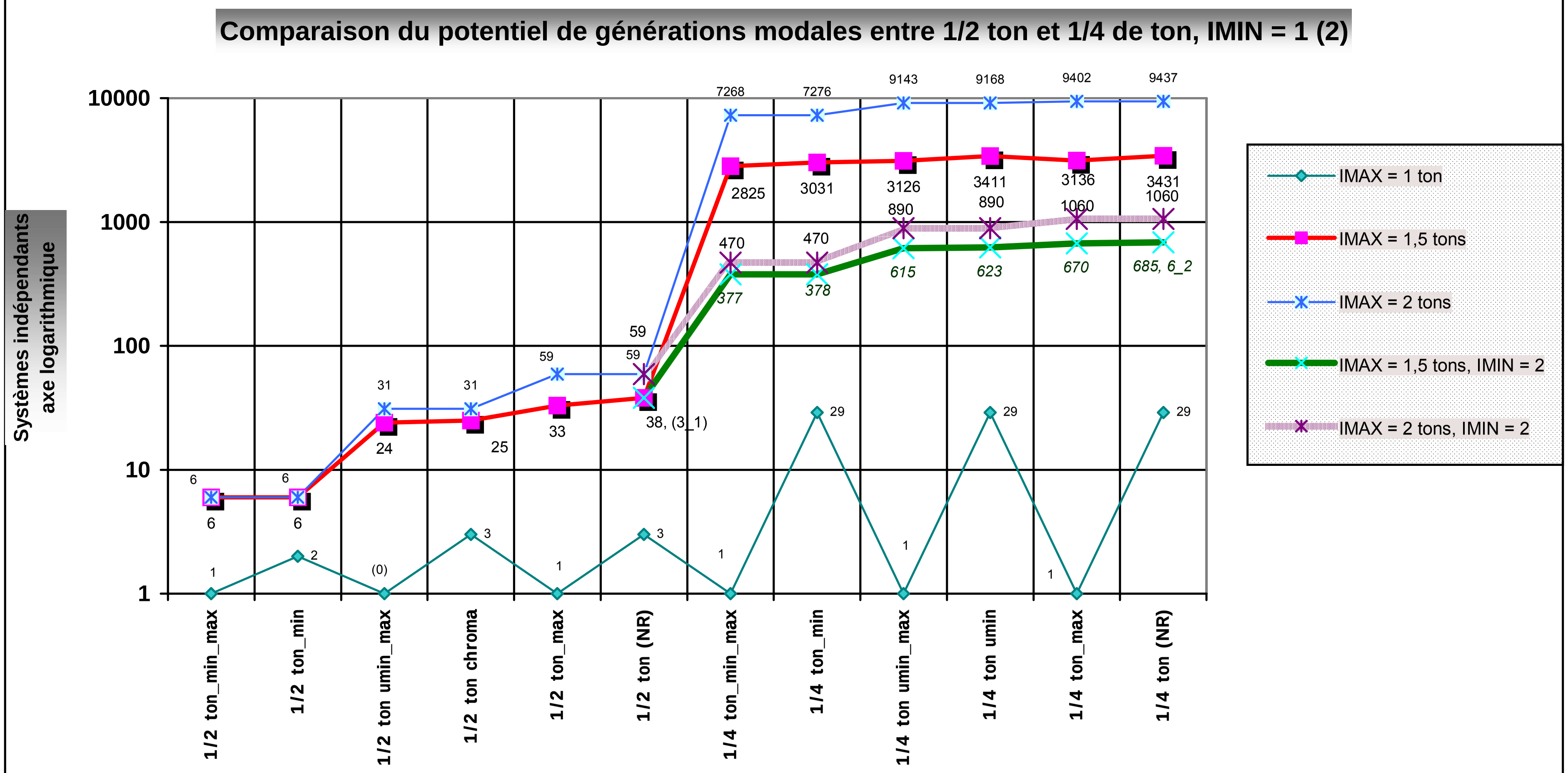
N° de Calcul	Intervalle mini/(tons)	Intervalle maxi/(tons)	test mini	test maxi	1/2 ton		1/4 de ton	
					Sous-systèmes octaviants	Systèmes indépendants	Sous-systèmes octaviants	Systèmes indépendants
1	**1 / (0,25)**	**8 / (2,0)**	**3**	**0**	**non calculé**		**64176**	**9168**
2	**1 / (0,25)**	**8 / (2,0)**	**3**	**2**			**64001**	**9143**
3	**1 / (0,25)**	**6 / (1,5)**	**3**	**0**			**23877**	**3411**
4	**1 / (0,25)**	**6 / (1,5)**	**3**	**2**			**21882**	**3126**
5	**1 / (0,25)**	**4 / (1,0)**	**3**	**0**			**203**	**29**
6	**1 / (0,25)**	**4 / (1,0)**	**3**	**2**			**7**	**1**
7	**1 / (0,5)**	**2 / (1,0)**	**3**	**0**	**21**	**3**	**non calculé**	
8	**1 / (0,5)**	**2 / (1,0)**	**3**	**2**	**0**	**0**		

Les résultats montrent un différentiel, dans des rapports allant de 20 à 80 environ entre sous-systèmes en 1/4 de ton et sous-systèmes en 1/2 ton, ce qui confirme un réservoir d'échelles considérable pour les systèmes en quart de ton et contribue à expliquer l'esthétique de la musique arabe, dont une des caractéristiques principales est la modulation et l'utilisation d'échelles alternatives à l'échelle principale d'un mode. Ce différentiel doit être relativisé : dans le graphique de la Figure n° 47 (plus bas), ces rapports sont soulignés par la comparaison directe entre génération par demi-ton ou par quart de ton, pour les différentes données initiales et différents filtres : il faut bien évidemment comparer ce qui est comparable, et « tempérer » la quantité en fonction de la qualité musicale des échelles modales (sous-systèmes) résultantes (le type de filtres appliqué).

La conclusion à ce stade est évidente : l'utilisation d'intervalles multiples approximatifs du 1/4 de ton permet un grand nombre de combinaisons intervalliques modales non permises par une limitation au demi-ton (nous parlons ici de combinaisons d'intervalles, et pas de variabilités d'intervalles autour d'un degré repère). Les proportions absolues entre le nombre de systèmes en 1/2 ton et en 1/4 de ton peuvent être « tempérées » par une utilisation à bon escient de filtres et critères musicaux, et permettre des sélections d'échelles modales conformes à une tradition particulière (ici et en l'occurrence la musique arabe), et de proposer de nouvelles échelles (ou des anciennes à redécouvrir) à priori compatibles avec une pratique contemporaine ou ancienne de ces musiques, a fortiori avec des pratiques futures possibles : la modulation, caractéristique essentielle de la musique du maqâm, est favorisée (en termes d'échelles potentielles supplémentaires) par l'existence des intervalles impairs en multiples de quart de ton.

Remarque : le lecteur aura remarqué l'absence d'exposé sur les variables annexes (contenance, homogénéité, etc.) pour les systèmes heptatoniques en 1/4 de ton - le critère d'homogénéité n'est plus pertinent dans ce cas, et doit être amélioré pour donner des indications fiables de contenance ; comme remarqué plus haut, l'inclusion du nombre d'intervalles « ni » ou d'autres variables pourrait contribuer à améliorer l'approximation intuitive constituée par l'homogénéité (H) : les résultats sont reproduits dans le mémoire pour des recherches éventuelles complémentaires qui pourraient être entreprises à ce sujet.

Figure n° 47. **Comparaison des résultats en générations de systèmes heptatoniques indépendants (1/4 et 1/2 ton)**



Filtres appliqués

6_2 == dernier point de la courbe en 1/4 de ton, Imax(6 x 1/4), Imin(2 x 1/4)

(3_1) == dernier point de la courbe en 1/2 ton, Imax(3 x 1/2), Imin(1 x 1/2)

« ***Le but de la science, c'est de découvrir des explications satisfaisantes de tout ce qui nous étonne et paraît nécessiter une explication*** ».

Karl Popper – « ***La connaissance objective*** »

→ Discussion sur les résultats de la deuxième partie

Rappelons en quelques points les postulats de base et les possibilités de la théorie de la systématique modale exposée en deuxième partie :

1. La systématique modale a pour but premier le classement des échelles, réelles (attestées) ou potentielles, de la musique modale. Dans ses applications, cette théorie permet de vérifier la conformité de ces échelles à des critères musicaux inspirés d'une tradition musicale donnée.
2. Cette théorie se fonde sur le principe d'un intervalle PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) : les autres intervalles sont considérés comme des multiples (approximatifs) de cet intervalle de base.
3. Les échelles de la musique modale sont approximées comme des successions d'intervalles compris entre un nombre minimal et un nombre maximal d'unités de base (dont la valeur est en général comprise entre le demi-ton et l'intervalle ḫijâz ou un ton et demi – parfois plus pour des systèmes pentatoniques), avec éventuellement une contrainte octaviante.
4. Dans sa formulation théorique de base, ainsi que pour des études méta-statistiques, la systématique proposée ne prend pas en compte la note de départ ou les variations commatiques[336].
5. Ces principes permettent de retrouver toutes les échelles correspondant à certains critères, sans duplication (sans redondances). Ils permettent aussi d'appliquer à ces échelles des filtres cernant au plus près la pratique musicale.
6. La systématique modale permet également de procéder à des extrapolations théoriques en changeant les données initiales et les filtres appliqués, pour rechercher des ensembles de systèmes satisfaisant à des critères arbitraires (qui peuvent néanmoins correspondre à un certain point de vue musical ou esthétique, ou encore mathématique) ou pour déterminer des tendances statistiques de formation (et de contenance) des échelles.

La systématique modale est donc, comme première approche du concept, un outil de recherche et de classement de systèmes musicaux quelconques dont les postulats de base sont inspirés de la pratique musicale modale : cet outil théorique utilise des mécanismes d'adaptation et de filtrage de ces systèmes pour vérifier la correspondance de leur structuration interne (intervallique) avec une pratique musicale donnée, et permet des projections théoriques extensives, au sein d'une musique donnée ou à travers des études comparatives entre différentes musiques du monde.

Dans le cadre de cette deuxième partie, la systématique modale nous a apporté un éclairage différent quant à, par exemple, la constitution des échelles pentatoniques et heptatoniques : les raisons d'existence de ces échelles semblent être liées à des critères qui semblent éloignés de ceux avancés à ce jour, et l'explication de leur formation (dans le sens large) ressort de manière beaucoup plus simple et pragmatique que ce à quoi une partie des lecteurs auraient pu s'attendre. Sur les trois questions que je posais en avant-propos à ce mémoire, la première[337], concernant les raisons d'existence (et de prééminence) du système heptatonique, trouve dans cette deuxième partie une explication alternative (et pragmatique), indépendante des théories existantes sur la formation de l'échelle musicale (ou sur la formations des sons musicaux) : ces théories (cycle des quintes, zarlinienne et théorie de la résonance[338]) sont basées sur des explications « naturelles » de la musique et entendent relier cette dernière à la physique et à la « nature », ou à la consonance. Mais une théorie, quelle que soit son élégance[339] (intellectuelle) et ses postulats, ne peut être justifiée (et acceptée) que si ses résultats reproduisent avec une précision suffisante le processus réel qu'elle s'est chargée de décrire : sur ce plan, les théories existantes sont incapables d'expliquer l'existence des intervalles réels utilisés en musiques modales, plus particulièrment ceux de la musique arabe qui sont des intervalles quasiment arbitraires autour d'une valeur cible donnée ; dans cette dernière musique, et pour une même exécution, une même phrase musicale, et par un même interprète, un intervalle peut varier dans des proportions infimes ou étendues sans que des critères de consonance interviennent et sans que la perception qualitative (identification) des intervalles utilisés s'en ressente. La valeur précise de l'intervalle (mesure exacte) est de

[336] Les applications pratiques de la théorie tiennent compte de ces deux facteurs, comme le lecteur pourra s'en rendre compte en troisième partie.
[337] La deuxième question concernait l'utilisation de notations (systèmes) en hauteurs de notes de préférence à des systèmes intervalliques : la raison de cette préférence est avant tout pratique, puisqu'il est plus facile pour un musicien (« classique ») de lire les notes, que les intervalles. La notation intervallique permet, par contre, d'utiliser l'attirail de la systématique modale, avec les résultats que l'on connaît.
[338] Encore que la théorie de la résonance soit (ait été) plus utilisée comme justification de l'harmonie tonale.
[339] Des critères « esthétiques » interviennent aussi pour les théories : la « meilleure » serait la plus concise et la plus « élégante » – ceci pourrait être valable, bien entendu, à condition que deux théories « concurrentes » rendent compte des mêmes phénomènes et donnent les mêmes résultats, quantitatifs et qualitatifs.

peu d'importance : c'est sa valeur relative qui distingue un intervalle d'un autre, et qui distingue des ensembles d'intervalles conjoints d'autres ensembles d'intervalles conjoints.

Par ailleurs, les théories évoquées ci-dessus ne rendent pas non plus compte des raisons d'existence du système heptatonique et de sa prééminence en musique modale.

Pour mieux étayer notre raisonnement, reprenons ensemble certaines des caractéristiques de la musique modale, plus particulièrement arabe : une musique dans son essence mélodique (et rythmique), dont l'expressivité est avant tout fonction de la variabilité de ses intervalles, et des possibilités (ou des limitations, comme nous pourrons le voir en troisième partie) de ses instruments. Ces intervalles sont non seulement variables, mais changeants : si la hauteur-cible d'un degré particulier dans un maqâm déterminé est plus ou moins perceptible pour des oreilles exercées, l'exécution (ou l'interprétation), elle dépend avant tout du bon vouloir de l'instrumentiste ou du chanteur (je ne parle pas ici des formations pléthoriques d'orchestres de conservatoires, où la plus légère différence d'interprétation est considérée comme une erreur impardonnable) ; fixer un tempérament définitif et absolu semble être, dans ce cas de figure, tout à fait illusoire, surtout en prenant en compte les différences régionales ou individuelles dans l'exécution d'un maqâm. Par ailleurs, les tendances des pratiques musicales modales en général sont celles de l'utilisation d'intervalles relativement homogènes (différence réduite entre intervalle minimum et intervalle maximum) en systèmes heptatoniques (parfois pentatoniques ou hexatoniques), avec des mécanismes internes identifiables de sélection des combinaisons linéaires d'intervalles les plus adaptées à leurs esthétiques musicales propres ; enfin, et « last but not least » : la pratique de la musique modale est (plus particulièrement en musique arabe) modulante ; les principes de base sont des principes d'expressivité, d'économie et de productivité, ou un équilibre entre possibilités d'expression musicale (nombre de systèmes musicaux pour des intervalles « homogènes »), limitation pour un système du nombre d'intervalles à l'octave, et possibilités de modulation au sein de l'ensemble cohérent de systèmes musicaux de référence[340].

Enfin, les modulations et la trame de base de cette musique semblent être du domaine du compréhensible si nous nous plaçons du côté du musicien : que peut bien désirer un musicien (représentant d'une tradition modale) pour satisfaire aux exigences d'un public de connaisseurs, ou à ses exigences propres? Une réponse évidente me semble être la satisfaction du sens de l'écoute de ces auditeurs, et le renouvellement du répertoire traditionnel, dans le cadre de la tradition, avec un minimum de moyens, et le maximum d'expressivité. La structure du maqâm telle que nous la comprenons aujourd'hui semble répondre à ces trois exigences d'économie (de moyens), d'expressivité, et de renouvellement dans la tradition : la structure heptatonique constitue un optimum permettant d'utiliser un grand nombre de variations possibles (modulations) au sein d'une octave cohérente, morcelée en intervalles à ambitus réduit mais avec suffisamment de subdivisions (pratiques) pour créer une quasi-infinité (pour la mémoire individuelle d'un musicien) de possibilités alternatives de structuration de l'échelle. Les autres systèmes possibles (plus petits ou plus grand que l'heptatonique, ou encore en multiples de demi-ton) ne présentent pas ces caractéristiques : les systèmes à nombre d'intervalles plus petit à l'octave limitent les possibilités d'échelles modales alternatives, et font peser sur les intervalles utilisés une contrainte (accumulation de grands intervalles) incompatibles avec les critères esthétiques de cette musique. D'un autre côté, l'extension du nombre d'intervalles à l'octave est générateur de complications théoriques et pratiques (notes et touches supplémentaires, cohérence), sans commune mesure avec le gain en expressivité espéré (et non réalisé, comme nous avons pu le voir), et crée une contrainte forte sur les intervalles utilisables (accumulation de petits intervalles de l'ordre du demi-ton) tout aussi incompatible avec les critères esthétiques du maqâm. Cette dernière explication est pragmatique : elle a un avantage certain, qui est qu'elle n'essaye pas d'imposer un présupposé théorique, mais qu'elle part de la réalité de la pratique musicale pour essayer d'expliquer les raisons de son existence ; cette explication est, aussi, simple : elle ne fait pas appel à une « élégance » de la formulation théorique qui s'auto-justifierait, mais répond à des considérations pratiques, et est applicable dans tous les domaines du maqâm (nous le verrons plus en détail en troisième partie, ainsi que pour les projections théoriques).

À partir de là, passons un peu en revue quelques indications que nous donnent les différentes générations modales exposées tout au long de cette deuxième partie :

1. Les systèmes en 1/2 ton ont un optimum de génération systématique et modale pour un nombre d'intervalles à l'octave qui varie entre cinq (pentatoniques) et six (hexatoniques) selon les critères appliqués ou non, en ne limitant pas les intervalles mini et maxi (en ne tenant pas compte de la réalité de la pratique musicale) : l'évolution de la capacité générationnelle de sous-systèmes (le nombre de sous-systèmes divisé par le nombre d'intervalles à l'octave) diminue à partir de l'optimum, et l'extension du nombre d'intervalles ne donnera pas beaucoup plus de systèmes à l'octave ; cette extension n'est pas économique, c'est-à-dire que les avantages attendus (plus de possibilités de combinaisons modales, plus de richesse d'expression musicale) ne sont pas au rendez-vous. Il y a donc une limite « naturelle », due à la structure de l'octave musicale, au nombre de systèmes générables et ce tant que l'on se cantonne aux approximations exposées en postulat ; ceci en théorie, donc sans application de critères musicaux particuliers à part l'obligation d'octave (sum_init = 12).

[340] Certains aspects de la modulation sont abordés plus en détail dans la troisième partie du mémoire.

2. L’application du filtre imax (valeur de l’intervalle maximum utilisable) et l’exigence d’utilisation d’intervalles compris entre 1/2 ton et 1 ton et demi (intervalles « homogènes ») modifient le paysage modal en 1/2 ton, et ramènent les optimums de génération modale vers 7 intervalles à l’octave (correspondant à la pratique modale occidentale) à part pour les systèmes « chromatiques » pour lesquels l’option hexatonique est la plus productive (ou économique).
3. En limitant l’intervalle maximum utilisable au ton, ce qui correspond à une pratique modale occidentale restreinte (pas de seconde augmentée dans l’échelle), les échelles utilisables se réduisent considérablement (un seul système transposable à l’identique en hexatonique, un hyper-système en heptatonique, etc.) et l’optimum revient à ni=7 pour les systèmes non-chromatiques (ici, ne comprenant pas de demi-tons adjacents).
4. Avec le passage à une modélisation en 1/4 de ton en intervalles « réalistes » (imin=2, imax=6), l’optimum du nombre de systèmes se stabilise à ni=7 intervalles à l’octave pour les systèmes filtrés en chromatique, à ni=8 pour les systèmes non filtrés. Un résultat complémentaire concerne les intervalles caractéristiques, au sein desquels le 3/4 de ton prédomine pour les systèmes filtrés, avec une exception pour les sous-systèmes avec double obligation de quinte et de quarte justes : dans ce dernier cas, la contrainte particulière qu'impose ce critère fait ressortir une prépondérance d'intervalles de l'ordre du ton, indispensables au complément de quarte vers quinte.
5. Les extrapolations pour des systèmes lo et go donnent des résultats cohérents avec ceux des systèmes octaviants.

Considérons un moment l'ensemble de résultats fournis jusque ce point par la systématique modale : à part la raison d'existence du système heptatonique qui a trouvé ici une explication alternative, la persistance mélodique de la musique du maqâm trouve aussi son explication dans la combinatoire intervallique ; l'existence de l'intervalle (approximatif et qualitatif) de 3/4 de ton est un moteur essentiel de l'expressivité maqâmienne (modulante) et un facteur de richesse considérable en termes de potentiel d'échelles modales ; l'intervalle ĥijâz (ou 6/4 de ton) est un facteur de micro-richesse (sur le plan des genres – point que nous verrons plus en détail dans la troisième partie), mais il constitue surtout un élément essentiel d'une richesse modale globale (toujours en termes de potentiel d'échelles) pour des échelles réduites à des intervalles multiples du demi-ton (approximatif) comme celles utilisées dans maintes musiques modales européennes (par exemple) de nos jours.

Si nous considérons l'ensemble des résultats des recherches effectuées, ainsi que les propriétés soulignées ci-dessus des musiques modales, il devient évident que le nombre de sept intervalles à l’octave n’est pas là par hasard, et que cet optimum de génération systémique correspond à une perception pour le moins intuitive des intervalles musicaux par les anciens (je ne limite pas la liste des pays d’où viendraient ces anciens) : en effet, les exigences de richesse en systèmes musicaux (pour les modulations), de cohérence, d’homogénéité des intervalles, d’esthétique musicale (filtres) ainsi que la réalité de la musique modale selon les manuscrits anciens ou selon la pratique moderne mènent toutes à l’utilisation de l’heptatonisme, et la systématique modale nous montre, à ce jour et jusqu'à preuve du contraire, que ce système heptatonique doit être issu, pour les raisons exposées ci-dessus, d'un système structurellement proche, sinon identique, au modèle sur grille de 24 intervalles à l'octave proposé en deuxième partie.

→ Conclusions de la deuxième partie

La systématique modale telle que développée dans cette deuxième partie donne des résultats qui contribuent à un éclairage différent de la structure du mode : les tendances qui apparaissent à travers ces résultats permettent d’émettre des hypothèses sur l'origine du système heptatonique, sur les raisons de l’utilisation de l’intervalle de 3/4 de ton en musique arabe, de la prépondérance de l’intervalle de un ton entier dans les modes occidentaux, ainsi que sur l’évolution (et les limites de cette évolution) vers plus de chromatisme et/ou de nombres d’intervalles successifs à l’octave en musique occidentale ; l'utilisation de la seconde augmentée dans certaines musiques modales européennes (et actuelles) trouve aussi, à travers les résultats statistiques, un éclairage complémentaire.

L'étude statistique et théorique de la deuxième partie n'apporte par contre pas encore d'information nouvelle sur la structure (et la micro-structure) du maqâm en particulier, ainsi que sur les critères esthétiques qui lui sont propres ; en troisième partie, nous passerons à l'étude (et à l'analyse) détaillée de certaines de ses composantes tout en poursuivant la recherche d'échelles alternatives et, surtout, en incluant un élément supplémentaire dans la réflexion : les genres de la musique arabe.